Concours de recrutement du second degré

Rapport de jury

Concours : Agrégation externe spéciale

Section : Mathématiques

Session 2023

Rapport de jury présenté par : Claudine Picaronny
Présidente du jury

© www.devenirenseignant.gouv.fr

Table des matières

Introduction

La session 2023 est la septième édition de ce concours spécial réservé aux titulaires d'un doctorat. Les exigences scientifiques de ce concours spécial sont les mêmes que celles qui régissent le concours externe standard, sans aucune concession quant aux connaissances mathématiques et leur maîtrise. Cependant, son format original et son public réservé donnent l'occasion de mettre en valeur la maturité liée à une expérience professionnelle et les qualités spécifiques résultant d'une pratique des mathématiques par la recherche. Ce concours permet ainsi de recruter des professeures et professeurs agrégés ayant un parcours professionnel déjà établi, une expérience de recherche, des compétences pluridisciplinaires, éventuellement marqués par la confrontation à un environnement international. Ce vécu est appelé à s'exprimer au concours et ne peut que rejaillir positivement sur la pratique enseignante. L'expérience montre que cette voie de recrutement est très ouverte et permet de valoriser — moyennant un indispensable effort de préparation — des candidates et candidats aux parcours et profils variés, incluant des titulaires d'une thèse dans une autre discipline que les mathématiques.

Ce rapport vise deux objectifs. D'une part il établit un bilan de la session 2023, notamment en présentant les données statistiques du concours et en discutant les éléments saillants des productions des candidats.

D'autre part il se veut un document *utile* pour les futurs candidates et candidats afin de les aider à se préparer au mieux pour les épreuves qui les attendent. Ainsi, il fournit :

— un corrigé commenté de l'épreuve écrite d'admissibilité, en indiquant quelques erreurs parmi les plus fréquentes et les défauts de rédaction observés ;
— des recommandations précises pour les épreuves orales d'admission.

Le jury invite les candidates et candidats de tous profils, ainsi que les centres de préparation et leurs intervenants, à en faire une lecture attentive et à bien tenir compte des prescriptions qui y sont faites. La consultation du rapport du concours standard, plus détaillé sur les attentes des épreuves d'admission peut s'avérer utile.

On trouve sur le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques agreg.org nombre d'informations utiles : des archives (sujets d'écrit, textes de modélisation, rapports) et des renseignements pratiques concernant les sessions à venir. En particulier, les futurs candidates et candidats peuvent trouver sur ce site la `ClefAgreg` qui leur permettra de se familiariser avec l'environnement informatique qu'ils rencontreront pour l'épreuve de modélisation. Se préparer suffisamment tôt à cette épreuve permet d'en bien comprendre les attendus, mais aussi peut aider à renforcer les capacités de synthèse sur l'ensemble du programme. Enfin, le jury rappelle qu'une réunion publique, ouverte aux préparateurs, est traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques pour évoquer le bilan et les perspectives du concours.

Le jury recommande aux candidates et candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours. Les lauréates et lauréats de ce concours spécial sont considérés comme devant être immédiatement opérationnels et ne devraient donc pas être concernés par les procédures de report de stage. Notamment, les possibilités d'être nommé stagiaire en qualité d'ATER ou affecté dans l'enseignement supérieur sur un emploi de professeur du second degré (PRAG) ne sont pas offertes aux lauréates et lauréats du concours spécial (note de service n°. 2019-064 du 25 avril 2019, https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=141354). Il est à noter que les reçus bénéficient d'une bonification d'ancienneté de deux ans au titre de la période de préparation du doctorat ; lorsque la période de préparation du doctorat a été accomplie sous contrat de travail, les services accomplis dans ce cadre sont pris en compte pour la part de leur durée excédant deux ans (article 6 du décret n$^{\text{o}}$. 72-580 du 4 juillet 1972 relatif au statut particulier des professeurs agrégés de l'enseignement du second degré, modifié par le décret n$^{\text{o}}$. 2016-656 du 20 mai 2016).

Chapitre 1

Déroulement du concours et statistiques

1.1 Déroulement du concours 2023

Le concours spécial docteur, création de la campagne de recrutement 2017, est un concours « jeune », instauré par le décret n°. 2016-656 du 20 mai 2016. En 2019, six disciplines étaient concernées par l'ouverture de postes à ce concours spécial : mathématiques, langues vivantes étrangères : anglais, lettres modernes , physique-chimie option chimie, physique-chimie option physique et sciences de la vie-sciences de la Terre et de l'Univers.

Les modalités des épreuves sont décrites par l'arrêté du 28 juin 2016, accessible sur le site

https://www.legifrance.gouv.fr/.

Le concours comprend une seule épreuve écrite d'admissibilité et trois épreuves orales d'admission : une épreuve de leçon de mathématiques qui couvre l'intégralité du programme (sans distinction des thèmes d'algèbre-géométrie et ceux d'analyse-probabilités), une épreuve de modélisation et une épreuve de mise en perspective didactique d'un dossier de recherche qui est spécifique à ce concours. Les candidates et les candidats ont le choix parmi trois options :

- probabilités et statistiques,
- calcul scientifique,
- algèbre et calcul formel,

qui ne diffèrent que par l'épreuve de modélisation.

Ce concours spécial est réservé aux titulaires d'un doctorat, le diplôme devant être acquis à la date de publication de la liste des admissibles. Les mères ou pères d'au moins trois enfants ainsi que les sportives et sportifs de haut niveau sont dispensés de cette condition de diplôme, mais ils seront bien sûr confrontés aux mêmes épreuves. En particulier candidater à ce concours n'a de sens que pour une personne qui, sans être forcément titulaire d'un doctorat, peut justifier d'un parcours et d'une expérience pouvant être mis en valeur dans l'épreuve sur dossier. Tout en rappelant que le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat de l'éducation (arrêté du 1er Juillet 2013) indique que la maîtrise de la langue française est un attendu premier, il est important de souligner que ce concours est ouvert à tout ressortissant d'un État membre de l'Union européenne, d'un État faisant partie de l'accord sur l'Espace économique européen, de la principauté d'Andorre, de la Confédération suisse ou de la Principauté de Monaco. Ainsi, ce concours peut être une opportunité pour des docteurs ressortissants de ces pays, intéressés pour exercer en France, mais dont le parcours académique initial, par exemple effectué à l'étranger, ne donnait pas d'inclination particulière pour passer le concours de l'agrégation externe standard dans la lignée de leur cursus. Enfin, cette session le prouve encore, le format de l'épreuve permet d'attirer des candidates et candidats qui seraient titulaires d'une thèse dans une autre discipline : ils ont l'occasion d'expliquer comment des outils mathématiques sont intervenus au cours de leur expérience de recherche ou professionnelle, comment ils ont été exploités au service d'applications concrètes et comment cette expérience pourra enrichir leur pratique d'enseignant en mathématiques.

L'épreuve écrite d'admissibilité s'est déroulée le jeudi 16 mars 2023. Les candidates et candidats sont libres de s'inscrire à la fois au concours standard et au concours spécial ; toutefois, les épreuves écrites ayant lieu au même moment, il leur faut déterminer finalement à quel concours ils souhaitent se présenter. Le jury conseille aux candidates et candidats d'effectuer ce choix en évaluant quelles épreuves leur permettent de mieux se mettre en valeur, en fonction de leur parcours et de leur préparation, toute autre considération, par exemple liée à la gestion des carrières, paraissant particulièrement hypothétique.

La liste des candidates et candidats admissibles a été publiée le 11 mai 2023. Les épreuves orales du concours spécial étaient organisées en parallèle de celles du concours standard de l'agrégation externe, du lundi 26 juin au mercredi 28 juin, à Strasbourg, au lycée Kléber. Le jury et les candidats y ont trouvé d'excellentes conditions de travail, et ont profité d'un accueil chaleureux et dévoué. Les jurys, les délibérations et les classements du concours spécial et du concours standard sont distincts. La liste d'admission a été publiée le mercredi 5 juillet 2023.

1.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2023

1.2.1 Commentaires généraux

Le nombre d'inscrits au concours spécial s'élève à 173 et 67 candidates et candidats se sont présentés à l'épreuve écrite. À l'issue de la délibération d'écrit, 18 candidates et candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une note de 20/20 et le dernier une note de 5/20. Avec toutes les précautions d'usage sur la comparaison entre deux concours différents, le jury estime que toutess ces candidates et tous ces candidats auraient probablement eu leur place parmi les admissibles du concours standard et que les meilleures copies du concours spécial s'y seraient placées à un très bon, voire excellent, rang. À l'issue des épreuves orales, les délibérations du jury ont conduit à retenir les 10 candidates et candidats qui avaient franchi la note moyenne de 8,9/20 ; le premier du concours présente une moyenne de 17,07/20 et le premier candidat non admis a une moyenne de 7,9.

Le jury renouvelle sa principale recommandation qui consiste à s'assurer de bases solides et à faire preuve de la maîtrise de ces bases, que ce soit par une rédaction efficace et convaincante à l'écrit, par des leçons calibrées et soignées ou une présentation à l'épreuve de modélisation qui inspirent toute confiance quant à la solidité de ces bases. La consultation du rapport du concours standard confortera ces priorités.

Admissibilité. L'épreuve écrite, unique, se présente sous un format différent de celui du concours standard. Le site agreg.org présente les archives du concours afin que les futurs candidates et candidats puissent se familiariser avec ce format. Le sujet était constitué

— d'une série d'exercices, qui balaient plutôt le niveau L1-L3,
— de deux problèmes **au choix**, l'un plutôt orienté sur la partie algèbre-géométrie du programme, l'autre orienté sur la partie analyse-probabilités.

Cette formulation permet d'une part de tester les candidats sur les bases du programme, et d'autre part de leur donner l'occasion de s'exprimer au mieux sur ce qui pourrait être leur terrain de prédilection. L'en-tête du sujet invitait très clairement les candidats à répartir leur temps, dont au moins la moitié devait être dévolue au problème et au moins un tiers à la partie exercices. Le barème correspondait à une telle répartition de l'effort. Les candidats doivent convaincre d'une compétence suffisante sur l'ensemble du programme : si le problème invite les candidats à s'exprimer sur leurs thèmes de prédilection, les exercices préliminaires ont précisément la vocation de vérifier les connaissances de base sur un éventail large. Les candidats ne doivent pas se se focaliser sur les seuls exercices relevant du même thème que le problème choisi. Une telle stratégie est pénalisée.

Un tel format « exercices (imposés) + problème au choix », avec la même clef de répartition du temps et du barème, sera reconduit en 2024.

Admission. Bien que le concours comporte une épreuve sur dossier, impliquant ainsi une connaissance du parcours et du profil du candidat, le jury travaille de manière étanche : les commissions des épreuves de leçons et de modélisation ne reçoivent aucune indication sur les candidates et candidats (sujet de thèse, provenance, situation professionnelle...). Les commissions n'ont par ailleurs aucune information quant aux résultats à l'écrit ou aux autres épreuves orales avant la phase de délibération. Ces épreuves obéissent donc au même fonctionnement et aux mêmes critères d'évaluation que pour le concours standard.

Le programme Le concours externe de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeures et professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé devrait permettre à la professeure ou au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac−3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

Le programme et la nature des épreuves, écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel de ministère de l'Éducation nationale `http://www.devenirenseignant.gouv.fr`. Le programme 2024 est légèrement modifié par rapport au programme 2023.

Le jury s'engage, bien sûr, à respecter le programme. Ce programme n'est pas exhaustif, il résulte d'un compromis et des résultats mathématiques « importants » manquent au programme. Il est tout à fait possible que des candidates et candidats aient connaissance de ces notions avancées, souhaitent en faire mention et proposer des excursions hors des limites du programme. Le jury saura s'adapter et apprécier de telles propositions. Toutefois, elles ne sont absolument pas nécessaires pour prétendre aux notes maximales.

1.2.2 Données statistiques diverses

Ce paragraphe regroupe quelques indications sur la répartition des candidates et candidats suivant l'académie, l'âge, le genre et la profession.

Répartition selon le genre On trouvait 30 % de femmes parmi les inscrits puis 27 % parmi les présents à l'épreuve d'admissibilité. 4 candidates sont admissibles sur 18 (soit 22 %), et deux candidates sont admises sur les 3 présentes à l'oral (20 % des admis) .
Le jury regrette les faibles pourcentages associés à la participation féminine à tous les niveaux du concours. C'est l'occasion de rappeler que les procédures de correction des épreuves écrites étant totalement anonymisées, il est difficile d'imaginer quel biais pourrait jouer à ce niveau.

Répartition selon l'âge La majeure partie des admissibles et des admis a moins de 40 ans.

Age	< 28	28 - 30	31- 40	41-50	>50
Inscrits	4	15	68	44	42
Présents	1	9	28	55	12
Admissibles	0	4	10	2	2
Admis	0	4	5	0	1

Répartition des candidats suivant l'âge aux différentes étapes du concours

Répartition selon l'académie.

	inscrits	présents	admissibles	admis
AIX MARSEILLE	10	5	1	
AMIENS	2			
BESANCON	2	1	1	1
BORDEAUX	3			
CLERMONT-FERRAND	2	1		
CRETEIL PARIS VERSAILLES	49	19	4	3
DIJON	1	1		
GRENOBLE	5	2	1	1
GUADELOUPE	2			
NOUVELLE CALÉDONIE	1			
POLYNÉSIE FRANCAISE	1	1		
RÉUNION	2			
LILLE	9	5	1	1
LYON	12	3	2	1
MONTPELLIER	4	1	1	1
NANCY-METZ	7	6		
NANTES	7	2	2	1
NICE	6	2		
NORMANDIE	8	3		
ORLÉANS-TOURS	5			
POITIERS	8	4	1	
REIMS	5	2	1	1
RENNES	2	1		
STRASBOURG	9	4	2	
TOULOUSE	11	4	1	

Tableau de répartition des candidats par académie

Répartition selon la profession Ces données sont issues des déclarations faites par les candidats lors de l'inscription et sont peu précises.

	inscrits	présents	admissibles	admis
Sans emploi	30	8	4	3
Ens.stagiaire 2e deg. col/lyc	4	3	2	2
Personnel enseignant titulaire fonction pul	2	2	1	
Cadres secteur privé convention collective	9	2	2	1
Certifié	51	24	3	
Professeur associé 2nd degré	8	3	1	
Contractuel 2nd degré	20	11	1	1
Enseignant du supérieur	3	1		
Contractuel enseignant supérieur	11	2		
Maître contr.et agréé rem tit	4	1		
Salariés secteur tertiaire	2			
Agrégé	3	2	1	
Vacataire enseignant du sup.	3			
Assistant d'éducation	1			
Professions libérales	4	2	1	1
Etud.hors inspe (prépa mo.univ)	5	3	2	2
Etud.hors inspe (sans prépa)	2			
Agent admi.membre UE (hors France)	1	1		
Salariés secteur industriel	2			
Maître auxiliaire	1			
Personnel de la fonction publique	2			
Vacataire du 2nd degré	1	1		
Personnel enseignant non titulaire fonctior	1			
PLP	1			
Etudiant en inspe en 2eme année	1			
Personnel administratif et technique MEN	1	1		

Tableau de répartition des candidats par profession déclarée

Domaines des doctorats. Les doctorats des candidats inscrits se répartissent sur des champs des mathématiques très variés ou relèvent d'autres disciplines (biologie,chimie, génie civil, génie éléctrique, génie industriel, informatique, mécanique, métiers de l'enseignement, physiques, sciences économiques). Les doctorats des admissibles sont au 2/3 des doctorats de mathématiques. Les doctorats des admis sont au 4/5 des doctorats de mathématiques.

Chapitre 2

Épreuve écrite de mathématiques

2.1 Énoncé

Les sujets des deux épreuves écrites sont disponibles à l'URL https://www.devenirenseignant.gouv.fr/les-sujets-des-epreuves-d-admissibilite-et-les-rapports-des-jurys-des-concours-de-l-agregati ou sur le site https://agreg.org.

2.2 Commentaires sur l'épreuve écrite d'admissibilité

— L'exercice 1 a été abordé par un peu plus de la moitié des candidates et candidats. Les équivalents sont souvent mal maîtrisés. On rappelle notamment qu'on ne peut additionner des équivalents sans précaution et que la différence de deux suites équivalentes ne tend pas nécessairement vers 0. On rappelle également l'importance d'une rédaction rigoureuse, surtout en début de copie : les quantificateurs ne sont pas des abréviations, il est bon de déclarer les variables utilisées, de préciser qu'une fonction est intégrable avant de manipuler son intégrale même lorsque cela n'est pas explicitement demandé, de vérifier explicitement les hypothèses d'un résultat utilisé.

— L'exercice 2 a été abordé par près de deux tiers des copies, la plupart des candidates et candidats se limitant aux deux premières questions classiques, mais souvent avec succès. La première question est l'occasion de rappeler l'importance de bien rédiger une récurrence, en définissant explicitement le prédicat à démontrer.

— L'exercice 3 a été abordé par un moins du quart des copies, et très bien réussi par quelques candidates et candidats.

— L'exercice 4 a été abordé par un peu plus de la moitié des candidates et candidats. Rares sont les copies ayant pris en compte que l'argument d'un nombre complexe n'est défini que modulo 2π.

— L'exercice 5 a été abordé par un peu plus d'un tiers des copies. La plupart se sont limitées à la première question, avec succès.

— Enfin, deux tiers des copies ont abordé au moins un problème, le problème d'algèbre et géométrie ayant été deux fois plus souvent choisi que celui d'analyse et probabilités.

— Le problème d'algèbre et géométrie étudie diverses propriétés des matrices symétriques positives, notamment en lien avec le produit de Hadamard. La première partie s'intéresse aux opérateurs de rang 1 et à la décomposition en somme d'opérateurs de rang 1, dans le cas général et dans le cas symétrique, ce qui n'est rien d'autre qu'une formulation du théorème spectral. Les questions étaient volontairement ouvertes afin de tester la compréhension de ces notions. La seconde partie s'intéresse à la localisation du spectre d'une matrice symétrique définie positive par la méthode de Householder. Il s'agit de tridiagonaliser la matrice grâce à des matrices de Householder, que l'on peut classiquement utiliser pour obtenir une décomposition QR (ou décomposition d'IWASAWA), en réfléchissant successivement les images des vecteurs colonnes pour les amener dans des plans choisis. La suite des polynômes caractéristiques des matrices obtenues en supprimant successivement la dernière ligne et la dernière colonne, vérifie alors une propriété d'entrelacement. C'est une propriété générale, connue sous le nom de théorème d'entrelacement de CAUCHY. Elle permet, grâce à des idées issues de la règle des signes de DESCARTES et du théorème de BUDAN, de localiser leurs racines, et donc le spectre de la matrice initiale, en étudiant les variations de signe. C'est en général une première approche, afin de pouvoir utiliser ensuite une méthode de NEWTON, par exemple. La troisième partie introduit le produit de KRONECKER et le produit de HADAMARD. Après quelques généralités sur la trace, le déterminant, le spectre etc. on montre que le produit de HADAMARD se comporte bien vis-à-vis des matrices symétriques (définies) positives. On obtient notamment l'assertion : $\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$, $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R}) \iff \forall B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})\ A \circ B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$. La quatrième partie est une application directe de cette stabilité à l'exponentielle de HADAMARD. La cinquième partie aborde une propriété de la matrice de gain relatif, une matrice utilisée notamment dans la théorie du contrôle, par exemple pour le multiplexage : elle permet de donner une mesure de la dépendance de la j^{e} sortie en fonction de la i^{e} entrée. Enfin la dernière partie étudie le déterminant d'un produit de HADAMARD en utilisant le complément de SCHUR. On obtient ainsi l'inégalité d'OPPENHEIM et son corollaire : $\det(A \circ B) \geqslant \det(A)\det(B)$.

— Le problème d'analyse et probabilités s'intéressait à la construction de la forme normale de BIRKHOFF d'un hamiltonien classique et au problème inverse consistant à déterminer, sous des conditions de symétrie du potentiel V, le hamiltonien à partir de sa forme normale de BIRKHOFF. On retrouvera cette construction dans [1], tandis que le problème inverse est traité dans [2]. La première partie avait pour objectif de familiariser les candidates et candidatss au paradigme hamiltonien, de déterminer le flot dans des cas particuliers (réutilisés par la suite), puis d'établir quelques résultats préliminaires. La deuxième partie établissait quelques résultats concernant les symplectomorphismes, notamment le fait qu'ils permettent, pour déterminer le flot, de se ramener à un hamiltonien plus simple. Cette utilité était ensuite illustrée dans le cadre d'un hamiltonien réduit à sa forme normale de BIRKHOFF. La troisième partie établissait, dans le cas d'un « fonds de puit » avec des conditions de symétrie, l'existence des premiers termes du développement de TAYLOR de la forme normale de BIRKHOFF. La quatrième partie démontrait l'existence du flot à temps 1 au voisinage de l'origine, démontrait que ce dernier est un symplectomorphisme, puis démontrait une formule permettant de déterminer les termes suivants du développement de TAYLOR de la forme normale de BIRKHOFF. La cinquième partie démontrait un lemme permettant la construction par récurrence des termes successifs du développement de TAYLOR de la forme normale de BIRKHOFF. Enfin, la dernière partie visait à construire la forme normale de BIRKHOFF terme à terme ainsi qu'à étudier le problème inverse consistant, sous les hypothèses de symétrie faites dans la troisième partie, à déterminer le hamiltonien à partir de sa forme normale de BIRKHOFF.

Bibliographie

[1] Benoît Grébert. Birkhoff Normal Form and Hamiltonian PDEs. In Société Mathématique de France, editor, *Partial differential equations and applications.*, Séminaires et Congrès, pages 1–46. Société Mathématique de France, 2007.

[2] Victor Guillemin and Alejandro Uribe. Some inverse spectral results for semi-classical Schrödinger operators. *Mathematical Research Letters*, 14, 2005.

2.3 Proposition de corrigé

Exercice 1

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et k dans $[\![2;n]\!]$. Puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k-1;k]$, on obtient l'inégalité :

$$1 \times \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

et donc en sommant pour k variant 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t,$$

et ainsi :

$$H_n \leqslant 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = 1 + \ln(n).$$

De même, pour tout k dans $[\![1;n]\!]$, puisque $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k;k+1]$:

$$\int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k},$$

et donc en sommant pour k variant de 1 à $n-1$:

$$\int_{1}^{n} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant H_n - \frac{1}{n}.$$

Finalement, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{n} + \ln(n) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

Ainsi, par théorème d'encadrement, puisque les deux membres de gauche ont pour équivalent commun la suite de terme général $\ln(n)$:

$$H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

2. La suite de terme général $\frac{1}{k}$ est décroissante et tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. C'est un critère suffisant pour affirmer que la série alternée de terme général $\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge.
3. Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puisque la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de paramètre $2 > 1$, elle converge. Donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est absolument convergente donc convergente. Finalement, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien convergente. Notons γ sa limite.

Soit n un entier naturel non nul. On remarque que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= H_{2n} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
&= H_{2n} - H_n \\
&= \ln(2n) + u_{2n} - (\ln(n) + u_n) \\
&= \ln(2) + u_{2n} - u_n
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2) + \gamma - \gamma = \ln(2).$$

Finalement, puisque la série de terme général $\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge, on obtient bien :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2).$$

4. Notons, pour tout entier naturel n non nul,

$$v_n = \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Soit n un entier naturel non nul. Comme précédemment,

$$v_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)}.$$

La série de terme général $\frac{1}{4k^2}$ est convergente et $\frac{1}{2k(2k-1)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4k^2}$, on en déduit alors :

$$v_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n},$$

le dernier équivalent s'obtenant par une comparaison avec une intégrale comme dans la première question. Par ailleurs,

$$v_{2n+1} = \sum_{k=2n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k} \right) = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k+1)},$$

et on en déduit comme précédemment que

$$v_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{4n}.$$

Finalement, on obtient l'équivalent :

$$\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}.$$

5. Soit n un entier naturel non nul et i dans $[\![1;n]\!]$. On a :

$$n = i \times \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor + \left(n - i \times \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \right).$$

Or on a l'inégalité :

$$0 \leqslant \frac{n}{i} - \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor < 1,$$

et puisque $i > 0$:

$$0 \leqslant n - i \times \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor < i.$$

Donc par unicité du reste de la division euclidienne de n par i, ce dernier est égal à $n - i \times \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$. Ainsi, i appartient à A_n si, et seulement si, $n - i \times \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \geqslant \frac{i}{2}$ et donc puisque $i/2 > 0$:

$$i \in A_n \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{n}{i} - \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \right) \geqslant 1.$$

Ainsi, puisque $0 \leqslant 2\left(\frac{n}{i} - \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \right) < 2$, on en déduit l'alternative suivante :

$$\left\lfloor 2\left(\frac{n}{i} - \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \right) \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in A_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Finalement,

$$\operatorname{card}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor 2\left(\frac{n}{i} - \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \right) \right\rfloor.$$

6. Posons, pour tout t dans $]0;1]$, $f(t) = \left\lfloor 2\left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) \right\rfloor$.
Soit k un entier naturel non nul. Pour tout t dans $\left]\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}\right]$, $\lfloor 1/t \rfloor = k$. Ainsi,

$$\forall t \in \left] \frac{1}{k+1}; \frac{1}{k} \right], \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left] \frac{1}{k+1}; \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \right] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or $]0;1] = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} \left] \frac{1}{k+1}; \frac{1}{k} \right]$. Ainsi, f est limite simple de fonctions en escalier, donc mesurable. Par ailleurs, f est positive et majorée par 1 donc intégrable et on a l'égalité suivante :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+1} \right).$$

7. Pour tout entier naturel n non nul,
$$\mathrm{card}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right).$$
Puisque f est bornée sur $]0;1]$ et continue par morceaux sur tout intervalle de la forme $[a;1]$ où a est dans $]0;1]$, on peut affirmer que :
$$\frac{1}{n}\mathrm{card}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$
Reste à calculer cette intégrale. Soit n un entier naturel non nul.
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+1}\right) = 2\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+2}\right) = 2\left(-1+\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right).$$
Donc
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+1}\right) = -1+2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = 2\ln(2)-1.$$
Finalement, d'après ce qui précède,
$$\mathrm{card}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} (2\ln(2)-1)n.$$

Exercice 2

1. Posons, pour tout entier naturel n non nul, $\mathcal{P}(n)$: « Pour tout polynôme Q unitaire de degré n, $\det(XI_n - C(Q)) = Q$ ».
   — $\mathcal{P}(1)$ est clair, puisque pour tout a_0 dans $\mathbf{C}$, en posant $Q = X - a_0$, on a $C(Q) = (a_0)$ et donc $\det(XI_1 - C(Q)) = X - a_0 = Q$.
   — Soit n dans $\mathbf{N}\backslash\{0\}$. Soit $a_0, \ldots, a_n$ des complexes et $Q = X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
$$\det(XI_{n+1} - C(Q)) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & -a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X-a_n \end{vmatrix}.$$
   Et donc en développant par rapport à la première ligne, ce déterminant vaut :
$$X\begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & -a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X-a_n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}a_0\begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$
   Finalement, en posant $R = X^n - \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$,
$$\det(XI_{n+1} - C(Q)) = X\det(XI_n - C(R)) + (-1)^{2n+1}a_0 = XR - a_0 = Q,$$
   en appliquant $\mathcal{P}(n)$ au polynôme R. On a donc bien démontré l'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$, et ceci pour tout entier n dans $\mathbf{N}\backslash\{0\}$.

— Finalement, on a bien démontré par récurrence que pour tout polynôme unitaire et non constant, le polynôme caractéristique de $C(Q)$ est Q.

2. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{C}^n$. On a pour tout j dans $[\![1; n-1]\!]$, $C(Q)e_j = e_{j+1}$. On en déduit que pour tout k dans $[\![0; n-1]\!]$, $C(Q)^k e_1 = e_{k+1}$: la première colonne de $C(Q)^k$ est donc égale à e_{k+1} et par ailleurs, pour tout $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ dans $\mathbf{C}^n$, en notant $P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$:
$$P(C(Q))e_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k e_{k+1}.$$
Puisque la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, si $P(C(Q)) = 0$, alors $P = 0$. Ainsi, $C(Q)$ n'a aucun polynôme annulateur (non nul) de degré au plus $n-1$. Le polynôme minimal de $C(Q)$ est donc de degré n, unitaire, et divise Q d'après la question précédente : il est donc égal à Q.

3. Puisque P est unitaire, $x_1 \dots x_n = (-1)^n P(0)$. Ainsi,
$$0 < |P(0)| = |x_1 \dots x_n| \leqslant 1.$$
Puisque P est coefficients entiers, on a donc $|P(0)| = 1$. Ainsi, $|x_1 \dots x_n| = 1$. Enfin, puisque pour tout j dans $[\![1; n]\!]$, $|x_j| \leqslant 1$, on en déduit que pour tout j dans $[\![1; n]\!]$,
$$1 = |x_1 \dots x_n| \leqslant |x_j| \leqslant 1,$$
et donc $|x_j| = 1$.

4. Puisque P est le polynôme caractéristique de A, A est semblable, dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont $x_1, \dots, x_n$. Donc A^k est donc semblable à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont $x_1^k, \dots, x_n^k$. Ainsi, P_k est le polynôme caractéristique de A^k. Puisque A est à coefficients entiers, A^k aussi et donc P_k est également à coefficients entiers.

5. Soit k un entier naturel non nul. Soit j dans $[\![0; n-1]\!]$. Notons $a_j(k)$ le coefficient de P_k devant X^j. On a :
$$|a_j(k)| = \left| \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_{n-j} \leqslant n} x_{i_1}^k \dots x_{i_{n-j}}^k \right| \leqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_{n-j} \leqslant n} 1 = \binom{n}{n-j}.$$
Ainsi, puisque pour tout k dans $\mathbf{N} \backslash \{0\}$, $a_j(k)$ est entier, la suite $(a_j(k))_{k \geqslant 1}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, et ceci pour tout j dans $[\![0; n-1]\!]$. Donc l'ensemble $\{P_k \mid k \in \mathbf{N} \backslash \{0\}\}$ est bien fini.

6. Soit j dans $[\![1; n]\!]$. Pour tout k dans $\mathbf{N} \backslash \{0\}$, x_j^k est l'une des n racines complexes de P_k, donc d'après la question précédente précédente, l'ensemble $\{x_j^k \mid k \in \mathbf{N}\}$ est également fini.

7. Soit j dans $[\![1; n]\!]$. D'après la question précédente, il existe deux entiers naturels k et ℓ tels que $k < \ell$ et $x_j^k = x_j^\ell$. Puisque $x_j \neq 0$, $x_j^{\ell - k} = 1$. Donc x_j est bien une racine de l'unité, ce qui achève la preuve.

Exercice 3

1. Puisque $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas vers ℓ, il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que l'ensemble $\mathbf{R}^d \backslash B(\ell, \epsilon)$ contient une infinité de termes de la suite.

   Par ailleurs, ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, donc il existe une infinité de termes dans la suite $B(\ell, \epsilon)$.

Supposons par l'absurde que $f(\overline{B(\ell,\epsilon)})\backslash B(\ell,\epsilon)$ contient un nombre fini de termes de la suite. Alors il existe un rang n_0 tel que :

$$(\star) \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \left(u_n \in \mathbf{R}^d \backslash f(\overline{B(\ell,\epsilon)} \quad \text{ou} \quad u_n \in B(\ell,\epsilon)\right).$$

Puisque $B(\ell,\epsilon)$ contient une infinité de termes de la suite, il existe un entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que $u_{n_1} \in B(\ell,\epsilon)$. Puisque $\mathbf{R}^d\backslash B(\ell,\epsilon)$ contient une infinité de termes de la suite, il existe un entier $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} \notin B(\ell,\epsilon)$.
Notons enfin A l'ensemble des entiers n dans $[\![n_1;n_2]\!]$ tels que $u_n \in B(\ell,\epsilon)$. A est non vide car il contient n_1 et A est majoré par n_2.
Notons n_3 son premier grand élément. Puisque $n_2 \notin A$, $n_3 \leqslant n_2 - 1$. Ainsi, $n_3 + 1 \in [\![n_1;n_2]\!]$ et $n_3 + 1 > \max(A)$, donc $u_{n_3+1} \notin B(\ell,\epsilon)$.
Or $n_3 \in A$, donc $u_{n_3} \in B(\ell,\epsilon)$. En particulier, $u_{n_3} \in \overline{B(\ell,\epsilon)}$ et donc $u_{n_3+1} \in f(\overline{B(\ell,\epsilon)})$. Ainsi, puisque $n_3 \geqslant n_1 \geqslant n_0$, l'entier $n_3 + 1$ contredit $(\star)$.
On a donc démontré par l'absurde que l'ensemble $f(\overline{B(\ell,\epsilon)})\backslash B(\ell,\epsilon)$ contient une infinité de termes de la suite. Or $\overline{B(\ell,\epsilon)}$ est compact puisque fermé borné en dimension finie, donc $f((\overline{B(\ell,\epsilon)})$ est compact car f est continue. Enfin, $B(\ell,\epsilon)$ est ouvert donc $f(\overline{B(\ell,\epsilon)})\backslash B(\ell,\epsilon)$ est compact. Puisque ce dernier contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, il contient une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ distincte de ℓ. C'est en contradiction avec l'hypothèse d'unicité de la valeur d'adhérence ℓ. On a finalement démontré par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ.

2. (a) Notons I l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Pour démontrer que I est un intervalle, il suffit de démontrer que :

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad a < b \Rightarrow (\forall c \in]a,b[,\ c \in I).$$

Soit a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Soit enfin c dans $]a,b[$. Démontrons que c est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, ce qui achèvera la preuve.
Il suffit de démontrer que pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $A_\epsilon = \{n \in \mathbf{N} \mid u_n \in [c-\epsilon, c+\epsilon]\}$ est infini. Soit $\epsilon > 0$. On suppose sans perte de généralité que $\epsilon \leqslant \min(c-a, b-c)$. Puisque $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant \epsilon.$$

Soit enfin n_1 un entier supérieur ou égal à n_0. Puisque a est une valeur d'adhérence, il existe un entier $n_2 \geqslant n_1$ tel que $|u_{n_2} - a| \leqslant \epsilon$. En particulier, $u_{n_2} \leqslant c$.
Notons $B = \{n \geqslant n_2 \mid \forall k \in [\![n_2;n]\!],\ u_n \leqslant c\}$. B est une partie non vide de $\mathbf{N}$. Puisque $b > c$ et que b est une valeur d'adhérence de la suite, B est également majorée. B admet donc un plus grand élément n_3. On a alors :
— $u_{n_3+1} > c$.
— $u_{n_3} \leqslant c$ et $u_{n_3+1} - u_{n_3} \leqslant \epsilon$ donc $u_{n_3+1} \leqslant c + \epsilon$.
Finalement, $n_3 + 1 \geqslant n_1$ et $n_3 \in A_\epsilon$. On a donc démontré que pour tout entier naturel $n_1 \geqslant n_0$, il existe un entier n tel que $n \geqslant n_1$ et $n \in A_\epsilon$. Ainsi, l'ensemble A_ϵ est infini, et ceci pour tout $\epsilon > 0$: c est donc une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in N}$, ce qui achève la preuve comme annoncé plus haut.

(b) Soit x dans I. Soit φ une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans lui-même telle que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Puisque f est continue en x,

$$u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} = f(u_{\varphi(n)}) - u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) - x.$$

Or $u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par unicité de la limite, $f(x) = x$.

(c) D'après la question 1, il suffit de démontrer que I est réduit à un singleton. Par hypothèse, I est non vide : supposons par l'absurde que I contienne deux éléments a et b tels que $a < b$. Puisque I est un intervalle, $\frac{a+b}{2}$ est une valeur d'adhérence, donc il existe un entier n tel que $a < u_n < b$ et donc $u_n \in I$. D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est stationnaire et en particulier converge. C'est absurde, puisqu'une suite convergente a au plus une valeur d'adhérence. Donc I est bien réduit à un singleton, ce qui achève la preuve.

Exercice 4

1. En utilisant l'indépendance de X et Y, on obtient :

$$\phi_{X+Y}(s)\phi_{X-Y}(t) = E(e^{isX}e^{isY})E(e^{itX}e^{-itY}) = \phi_X(s)\phi_Y(s)\phi_X(t)\phi_Y(-t).$$

Par ailleurs, en utilisant l'indépendance de $X+Y$ et $X-Y$ puis à nouveau celle de X et Y :

$$\phi_{X+Y}(s)\phi_{X-Y}(t) = E(e^{is(X+Y)}e^{it(X-Y)}) = E(e^{i(s+t)X}e^{i(s-t)Y}) = \phi_X(s+t)\phi_Y(s-t).$$

Finalement, on a bien démontré que :

$$\phi_X(s+t)\phi_Y(s-t) = \phi_X(s)\phi_Y(s)\phi_X(t)\phi_Y(-t).$$

2. Soit s et t deux réels. En utilisant à nouveau l'indépendance de X et Y,

$$\phi(s+t)\phi(s-t) = \phi_X(s+t)\phi_Y(s-t)\phi_X(s-t)\phi_Y(s+t).$$

Or en appliquant la question précédente à s et $-t$:

$$\phi_X(s-t)\phi_Y(s+t) = \phi_X(s)\phi_Y(s)\phi_X(-t)\phi_Y(t).$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\phi(s+t)\phi(s-t) &= \phi_X(s)^2\phi_Y(s)^2\phi_X(t)\phi_X(-t)\phi_Y(t)\phi_Y(-t)\\ &= \phi(s)^2\phi(t)\phi(-t) \text{ en utilisant l'indépendance de } X \text{ et } Y\\ &= \phi(s)^2\phi(t)\overline{\phi(t)} \text{ car } X+Y \text{ est réelle}\\ &= \phi(s)^2|\phi(t)|^2.\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, puisque $\phi(0) = 1$, on a :

$$\forall s \in \mathbf{R}, \quad \phi(2s) = \phi(s)^2|\phi(s)|^2.$$

Supposons que ϕ s'annule en un réel s_0. Alors $0 = \phi(s_0) = \phi\left(\frac{s_0}{2}\right)^2 |\phi\left(\frac{s_0}{2}\right)|^2$. Donc $\phi\left(\frac{s_0}{2}\right) = 0$. On démontre alors par récurrence simple que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \phi\left(\frac{s_0}{2^n}\right) = 0.$$

Puisque ϕ est continue en 0, on a en passant à la limite que $1 = 0$, ce qui est absurde. Donc ϕ ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$.

4. En identifiant modules (plus précisément leurs logarithmes) et arguments dans l'égalité de la question 2, on a pour tous s et t réels :

$$r(s+t) + r(s-t) = 2r(s) + 2r(t) \quad \text{et} \quad \theta(s+t) + \theta(s-t) \equiv 2\theta(s)\ [2\pi].$$

Soit t un réel. Posons pour tout n dans $\mathbf{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $r(nt) = n^2 r(t)$ et $\theta(nt) \equiv n\theta(t)\ [2\pi]$ ».

— $\theta(0) = 0$ par hypothèse. Par ailleurs, $\phi(0) = 1$ donc $r(0) = 0$. On a donc bien $\mathcal{P}(0)$.

— $\mathcal{P}(1)$ est clair.

— Soit n dans $\mathbf{N}\backslash\{0\}$. Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$.

$$r((n+1)t) = 2r(nt) + 2r(t) - r((n-1)t) = (2n^2 + 2 - (n-1)^2)r(t) = (n+1)^2 r(t).$$

Par ailleurs,

$$\theta((n+1)t) \equiv 2\theta(nt) - \theta((n-1)t) \equiv (2n - n + 1)\theta(t) \equiv (n+1)\theta(t)\ [2\pi].$$

Ainsi, on a démontré que ($\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$) implique $\mathcal{P}(n+1)$, et ceci pour tout n dans $\mathbf{N}\backslash\{0\}$.

— Finalement, on a démontré par récurrence double que pour tout n dans $\mathbf{N}$ et pour tout t réel :

$$r(nt) = n^2 r(t) \quad \text{et} \quad \theta(nt) \equiv n\theta(t)\ [2\pi].$$

Soit n dans $\mathbf{N}$. La fonction $t \mapsto \theta(nt) - n\theta(t)$ est continue, à valeurs dans $2\pi\mathbf{Z}$, et nulle en 0. Elle est donc nulle. On a donc pour tout n dans $\mathbf{N}$ et pour tout t réel, $\theta(nt) = n\theta(t)$. Enfin, en identifiant modules et arguments pour tout t réel dans l'égalité $\phi(-t) = \overline{\phi(t)}$, on obtient $r(-t) = r(t)$ et $\theta(-t) = -\theta(t)$ (a priori modulo 2π mais on conclut comme précédemment). Donc r est paire et θ impaire. Finalement,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}, \quad r(nt) = n^2 r(t) \text{ et } \theta(nt) = n\theta(t).$$

5. Notons $m = \theta(1)$ et $s = r(1)$.

— Soit p dans $\mathbf{Z}$ et q dans $\mathbf{N}\backslash\{0\}$. D'après la question précédente,

$$r\left(\frac{p}{q}\right) = p^2 r\left(\frac{1}{q}\right) \quad \text{et} \quad r(1) = q^2 r\left(\frac{1}{q}\right).$$

Donc $r\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)^2 s$ et de même $\theta\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}m$.

— Puisque r et θ sont continues sur $\mathbf{R}$ et que $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$, on en déduit que pour tout t réel, $r(t) = st^2$ et $\theta(t) = mt$.

On a donc pour tout t dans $\mathbf{R}$, $\phi(t) = \exp(imt + st^2)$. Or pour tout t dans $\mathbf{R}$,

$$e^{st^2} = |\phi(t)| \leqslant E(|e^{it(X+Y)}|) \leqslant 1.$$

Donc $s \leqslant 0$. Ainsi, il existe σ dans $\mathbf{R}_+$ tel que $s = -\frac{\sigma^2}{2}$ et finalement,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \phi(t) = \exp\left(imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

6. Puisque X et $-Y$ sont également indépendantes, et que $X + (-Y)$ et $X - (-Y)$ le sont par hypothèse, on en déduit qu'il existe m' dans $\mathbf{R}$ et σ' dans $\mathbf{R}_+$ tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \phi_{X-Y}(t) = \exp\left(im't - \frac{\sigma'^2 t^2}{2}\right).$$

Donc par indépendance de $X+Y$ et $X-Y$, on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \phi_X(t) = \phi_{2X}\left(\frac{t}{2}\right) = \phi_{X+Y}\left(\frac{t}{2}\right)\phi_{X-Y}\left(\frac{t}{2}\right) = \exp\left(i\frac{m+m'}{2}t - \frac{\sigma^2+\sigma'^2}{8}t^2\right).$$

De même,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \exp\left(i\frac{m-m'}{2}t - \frac{\sigma^2+\sigma'^2}{8}t^2\right).$$

Puisque la loi d'une variable aléatoire est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique, on en déduit que :

— Si $\sigma = \sigma' = 0$, alors X est presque sûrement constante égale à $\frac{m+m'}{2}$ et Y à $\frac{m-m'}{2}$.

— Sinon, X suit une loi normale d'espérance $\frac{m+m'}{2}$ et d'écart-type $\frac{\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}}{2}$ et Y une loi normale d'espérance $\frac{m-m'}{2}$ et de même écart-type.

Exercice 5

1. Puisque A et λA sont semblables, elles ont le même déterminant. Donc $\det(A) = \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. Et puisque A est inversible, on en déduit bien que $\lambda^n = 1$.
2. Supposons que A n'est pas nilpotente. Alors A admet une valeur propre μ non nulle. $\lambda\mu$ est valeur propre de λA donc de A. Ainsi, on démontre par récurrence simple que pour tout k dans $\mathbf{N}$, $\lambda^k\mu$ est valeur propre de A. Puisque λ est une racine primitive n-ième de l'unité, les nombres complexes $1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}$ sont deux à deux distincts. Donc puisque $\mu \neq 0$, A admet n valeurs propres deux à deux distinctes : elle est donc diagonalisable. Finalement, on a bien démontré que A est nilpotente ou diagonalisable.
3. Soit λ une racine n-ième de l'unité qui n'est pas primitive. Il existe donc un diviseur d de n dans $[\![1; n-1]\!]$ tel que $\lambda^d = 1$. Notons δ l'entier $n/d \geqslant 2$ et J la matrice
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\delta(\mathbf{C}).$$
Soit enfin A la matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonale par blocs de taille δ : $J, \lambda J, \dots, \lambda^{d-1}J$. λA est également diagonale par blocs, avec les mêmes blocs sur la diagonale. Donc A est semblable à λA (avec une matrice de passage qui est une matrice de permutation). Par ailleurs, A est inversible car triangulaire avec des coefficients tous non nuls sur la diagonale. Enfin, les valeurs propres de A sont $1, \lambda, \dots, \lambda^{d-1}$ et puisque J est de rang $\delta - 1$, ses espaces propres sont tous de dimension 1. Ainsi, la somme des dimension de ses espaces propres vaut d et $d < n$. Donc A n'est pas diagonalisable.

Partie I – Dualité

1. Applications linéaires de rang 1
   (a) Par définition d'un espace vectoriel l'application de $\mathbf{K} \times F$ dans F donnée par $(\lambda, y) \mapsto \lambda y$ est bilinéaire et donc en particulier linéaire en λ. Par composition avec la forme linéaire φ on en déduit que $v \otimes \varphi$ est linéaire. On a donc bien affaire à une application à valeurs dans $\mathscr{L}(E, F)$.
   Par définition $v \otimes \varphi$ est à valeurs dans $\mathbf{K}v$ et son noyau contient celui de φ. On en déduit que son rang est inférieur à 1 et qu'il est nul si v ou φ l'est. Réciproquement si v et φ ne sont pas nuls, on dispose de w dans E tel que $\varphi(w) \neq 0$ et donc aussi $v \otimes \varphi(w)$. Ainsi dans ce cas $v \otimes \varphi$ est de rang exactement 1.
   Finalement, le rang de $v \otimes \varphi$ est inférieur à 1 et est nul si et seulement si $v = 0$ ou $\varphi = 0$.

   Très peu de copies songent à vérifier que l'application $v \otimes \varphi$ est linéaire, ce qui est pourtant nécessaire pour évoquer son rang. Le cas du rang nul est également très peu évoqué, ce qui ne met pas en confiance la personne qui corrige quant à la rigueur dont est capable de faire preuve le candidat ou la candidate. Des confusions entre le rang d'une application linéaire et la dimension de son espace d'arrivée sont très surprenantes à ce niveau de concours.

   (b) Par la bilinéarité déjà signalée de $(\lambda, y) \mapsto \lambda y$, l'application $(\varphi, v) \mapsto v \otimes \varphi$ est linéaire en v. L'évaluation en x étant linéaire de E^* dans $\mathbf{K}$, par composition $(\varphi, v) \mapsto v \otimes \varphi$ est linéaire en φ, et donc $(\varphi, v) \mapsto v \otimes \varphi$ est bien une application bilinéaire de $F \times E^*$ dans $\mathcal{L}(E, F)$.

D'après ce qui précède l'image de cette application est incluse dans l'espace des applications de rang inférieur à 1. Réciproquement soit u dans $\mathscr{L}(E,F)$ de rang inférieur à 1. Si ce rang est nul, $u = 0$ et u appartient à l'image de n'importe quelle application linéaire, donc de celle étudiée dans cette question. Sinon soit x dans E tel que $u(x)$ soit non nul. On pose $v = u(x)$. Puisque u est de rang 1, pour tout y dans E on dispose de $\varphi(y)$ dans $\mathbf{K}$ tel que $u(y) = \varphi(y)v$. Puisque u est linéaire, par exemple en composant avec la forme coordonnée associée à v dans $\mathbf{K}v$, φ l'est aussi et $u = v \otimes \varphi$. Il en résulte que l'image cherchée est l'ensemble des applications de rang inférieur à 1.

La vérification de la bilinéarité ne nécessitait pas de calculs, mais il est surprenant de voir des caractérisations insuffisantes dans certaines copies. De même la confusion entre image de l'application $(\varphi, v) \mapsto v \otimes \varphi$ et celle de $v \otimes \varphi$ montre de graves incompréhensions du sujet. Ici aussi de la rigueur était attendue dans la réponse, en tenant compte du cas de rang nul.

(c) Si v et φ ne sont pas nuls, on dispose de x dans E tel que $\varphi(x)$ n'est pas nul et donc $v \otimes \varphi(x)$ non plus. Réciproquement si v ou φ est nul, il en va de même pour $v \otimes \varphi$.

Si v et φ ne sont pas nuls, on a de plus $\operatorname{Ker}(v \otimes \varphi) = \operatorname{Ker}(\varphi)$ et $\operatorname{Im}(v \otimes \varphi) = \mathbf{K}v$. Par conséquent si w et ψ sont dans F et E^* respectivement, $v \otimes \varphi = w \otimes \psi$ entraîne que v et w sont colinéaires et φ et ψ aussi. Par définition et non-nullité de $v \otimes \varphi$ on en déduit que les facteurs de proportionnalité sont inverses l'un de l'autre.

En résumé si v ou φ est nul, les antécédents de $v \otimes \varphi$ sont les couples (w, ψ) pour lequel w ou ψ est nul. Sinon ce sont les couples de la forme $(\alpha v, \alpha^{-1}\varphi)$ avec α dans $\mathbf{K}^*$.

Là encore on est surpris des confusions entre les antécédents de u par l'application $(\varphi, v) \mapsto v \otimes \varphi$ et ceux des éléments de F par une application $v \otimes \varphi$ particulière. Le peu de réussite à cette question montre que les opérateurs de rang 1 sont insuffisamment compris et/ou étudiés.

2. Endomorphismes symétriques de rang 1

(a) L'application nulle étant symétrique, si v ou φ est nul, $v \otimes \varphi$ est symétrique. On suppose dorénavant v et φ non nuls. L'application $v \otimes \varphi$ est symétrique si et seulement pour tous x et y dans E on a $\varphi(x) \langle v \,|\, y \rangle = \varphi(y) \langle x \,|\, v \rangle$. En particulier pour $y = v$, il vient $\varphi = \alpha v^*$ avec $\alpha = \dfrac{\varphi(v)}{\|v\|^2}$. Réciproquement si α est un réel et v est dans E, l'application $\alpha v \otimes v^*$ est symétrique car l'égalité caractéristique précédente s'écrit alors $\alpha \langle v \,|\, x \rangle \langle v \,|\, y \rangle = \alpha \langle v \,|\, y \rangle \langle v \,|\, x \rangle$. Autrement dit $v \otimes \varphi$ est symétrique si et seulement si v est nul ou s'il existe un scalaire α tel qu'on ait $\varphi = \alpha v^*$.

De façon assez inquiétante des copies prennent pour définition d'un endomorphisme symétrique $\forall x \in E\ u(-x) = u(x)$. Outre que c'est un non-sens pour une application linéaire, cela révèle de graves lacunes sur les espaces pré-hilbertiens.

(b) Il résulte de la question précédente que l'application $v \otimes w^*$ est symétrique si et seulement si $v = 0$ ou w^* est un multiple de v^*. D'après le théorème de Riesz, i.e. puisque le produit scalaire est non dégénéré, cette dernière condition équivaut à w un multiple de v. Ainsi on en déduit que $v \otimes w^*$ est symétrique si et seulement si v et w sont colinéaires, i.e. $\operatorname{rg}(v, w) \leqslant 1$.

En dehors de l'oubli du cas $v = 0$ ou $w = 0$, cette question n'a pas posé de problème.

3. Applications linéaires de rang r

(a) Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ et $(v_1, \ldots, v_r)$ deux familles libres dans E^* et F respectivement, telles que $u = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes \varphi_i$. Par indépendance de $(v_1, \ldots, v_r)$, on a $\mathrm{Ker}(u) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$. Par indépendance de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$, $\mathrm{Ker}(u)$ est donc un espace de co-dimension r et donc, d'après le théorème du rang, u est de rang r. Réciproquement si u est de rang r, on dispose d'une famille $(v_1, \ldots, v_r)$ formant une base de son image et de fonctions $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ de E dans $\mathbf{R}$ telles que, pour tout x de E on ait $u(x) = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k(x) v_k$. Puisque u est linéaire, par exemple en composant avec les formes coordonnées associées à la base $(v_1, \ldots, v_r)$ de $\mathrm{Im}(u)$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ sont linéaires et $u = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes \varphi_i$. Ainsi pour u dans $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathrm{rg}(u) = r \iff u = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes \varphi_i$, avec $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ et $(v_1, \ldots, v_r)$ deux familles libres dans E^* et F respectivement.

Cette question s'est révélée bloquante pour la plupart des copies. On ne saurait trop insister sur la compréhension de la notion de rang, de familles libres etc.

(b) Soit $(v_1, \ldots, v_r)$ une famille libre orthogonale et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ des scalaires non nuls tels que $u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \otimes v_i^*$. Comme $(v_1, \ldots, v_r)$ est libre, il résulte du théorème de Riesz que $(v_1^*, \ldots, v_r^*)$ l'est également. Comme $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ sont des scalaires non nuls, alors $(\lambda_1 v_1^*, \ldots, \lambda_r v_r^*)$ est libre. La question précédente montre que u est de rang r et la question 2.b) qu'il est symétrique.
Réciproquement soit u symétrique de rang r. Le théorème spectral permet de disposer d'une base d'orthodiagonalisation $(v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_n)$ de u, avec $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$, et de scalaires tous non nuls $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ tels que $u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \otimes v_i^*$. Ainsi, pour u dans $\mathscr{S}(E)$, $\mathrm{rg}(u) = r \iff u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \otimes v_i^*$, avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ des scalaires non nuls et $(v_1, \ldots, v_r)$ une famille orthonormée dans E.

Le théorème spectral est sans nul doute l'un des théorèmes les plus importants en algèbre et la maîtrise de ce théorème est un des attendus du concours.

Partie II – Localisation du spectre d'une matrice symétrique réelle

1. Matrices de Householder

(a) Une matrice de type $\mathcal{H}$ est la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan, à savoir l'orthogonal de V. On a donc $H_V e_1 = e_1$ si et seulement si V est orthogonal à e_1.

L'interprétation géométrique a été le plus souvent omise ou a donné lieu à des conclusions étonnantes comme la suggestion d'être une matrice de rotation.

(b) Si $n = 2$, le vecteur e_2 convient. On suppose dorénavant $n > 2$. Soit P_1 un plan contenant e_1 et Ae_1, et Π un plan bissecteur de P et du plan engendré P_2 par e_1 et e_2. Soit enfin V un vecteur unitaire orthogonal à Π. Alors l'image de P_1 par H_V est P_2 et $H_V e_1 = e_1$ d'après la question précédente. Donc, par symétrie de H_V, $H_V^T A H_V e_1 = H_V A e_1 \in P_2$, i.e. la première colonne de $H_V^T A H_V$ ne comporte que des zéros à partir de la troisième ligne.

L'interprétation géométrique était très utile. Faute de cela la plupart des copies ont été bloquées à cette question.

(c) Remarquons que les coefficients diagonaux d'une matrice symétrique réelle positive B sont positifs puisqu'ils sont donnés par $e_i^T B e_i$, et que la positivité est invariante par conjugaison par le groupe orthogonal. Ainsi, dans la question précédente, soit $H_V^T A H_V$ n'a que des coefficients positifs sur sa première colonne, soit c'est le cas de $H_{e_2}^T H_V^T A H_V H_{e_2}$.
Pour k dans $\mathbf{N}\backslash\{0\}$, on note $(\mathbb{P}_k)$ le prédicat donné par : si M est une matrice symétrique réelle positive de taille k, il existe m matrices $H_1, \dots, H_m$ de type $\mathcal{H}$ et fixant e_1, avec m entier naturel, telles que $H_m^T \cdots H_1^T M H_1 \cdots H_m$ soit tridiagonale à coefficients positifs.
Pour $k = 1$, on prend $m = 0$ puisque l'unique coefficient de la matrice est alors positif. Pour $k = 2$, on prend $m = 0$ ou $m = 1$ et $H_m = H_{e_2}$ selon que les coefficients non diagonaux sont positifs ou non, les éléments diagonaux étant automatiquement positifs.
Soit maintenant k supérieur à 2 tel que $(\mathbb{P}_k)$ soit vrai et M une matrice symétrique réelle positive de taille $k+1$. D'après la question précédente on dispose de V unitaire tel que, en remarquant que $H_V^T M H_V$ est symétrique réelle positive puisque M l'est,

$$H_V^T M H_V = \begin{pmatrix} a & W^T \\ W & N \end{pmatrix}$$

avec W dans $\Re_2$ et N symétrique. Quitte à considérer $H_{e_2}^T H_V^T A H_V H_{e_2}$, on peut supposer $W \in \mathbf{R}_+ e_2$, de sorte qu'on a affaire à une matrice tridiagonale à coefficients positifs si et seulement si N l'est.
Remarquons également que N est symétrique réelle positive : si X est un vecteur colonne de taille k, on note Y le vecteur dont la première coordonnée est nulle et les suivantes sont celles de X, alors $X^T N X = Y^Y H_V^T M H Y \geqslant 0$. Soit maintenant U un vecteur unitaire dans $e_1^\perp$, alors H_U s'écrit également par blocs, de sorte qu'on a, en notant $\tilde{H}_U$ son bloc inférieur droit,

$$H_U^T H_V^T A H_V H_U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{H}_U^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & W^T \\ W & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{H}_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & W^T \tilde{H}_U \\ \tilde{H}_U^T W & \tilde{H}_U^T N \tilde{H}_U \end{pmatrix} .$$

Par conséquent si $\tilde{H}_U e_2 = e_2$, puisque W est colinéaire à e_2, on a

$$H_U^T H_V^T A H_V H_U = \begin{pmatrix} a & W^T \\ W & \tilde{H}_U^T N \tilde{H}_U \end{pmatrix} .$$

D'après $(\mathbb{P}_k)$ on dispose de matrices de type $\mathcal{H}$, donc de vecteurs $V_1, \dots, V_m$ dans l'espace engendré par $(e_2, \dots, e_{k+1})$, fixant e_2 et telles que $H_m^T \cdots H_1^T N H_1 \cdots H_m$ soit tridiagonale à coefficients positifs. Les calculs précédents montrent que $H_{V_m}^T \cdots H_{V_1}^T M H_{V_1} \cdots H_{V_m}$ est également tridiagonale à coefficients positifs.
On en déduit qu'il existe des matrices $H_1, \dots, H_m$, de type $\mathcal{H}$, telles que $H_m^T \cdots H_1^T A H_1 \cdots H_m$ soit tridiagonale à coefficients positifs.

Cette question, technique mais non bloquante, n'a pas été réussie. Toutefois les bonnes idées ont été valorisées, qu'elles soient de nature géométrique ou algébrique. L'intérêt est de proposer une tridiagonalisation effective, contrairement à la diagonalisation théorique donnée par le théorème spectral. Cette tridiagonalisation est particulièrement intéressante pour localiser le spectre de A, comme le montre la suite du problème.

2. – Spectres entremêlés

   (a) Si M est une matrice et (i,j) un couple d'entiers, on note $M^{(i,j)}$ la matrice extraite de M obtenue en supprimant la i^{e} ligne et la j^{e} colonne. Pour k supérieur à 2, en développant par rapport à la dernière colonne, on obtient $P_{k+1} = (X-b_{k+1})P_k + c_k \det((XI_{k+1}-A)^{(k,k+1)})$ et donc en développant le mineur selon sa dernière ligne, $P_{k+1} = (X-b_{k+1})P_k - c_k^2 P_{k-1}$. Comme on a $P_2 = (X-b_2)P_1 - c_1^2$, avec $P_0 = 1$, il vient $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$ $P_{k+1} = (X-b_{k+1})P_k - c_k^2 P_{k-1}$.

   Cette question n'a posé aucune difficulté.

   (b) Soit k un entier non nul et x une racine commune de P_k et P_{k+1}. La relation précédente montre que x est racine de P_{k-1}, car $c_k \neq 0$, et donc, par récurrence descendante, de tous les polynômes $P_0, \ldots, P_{k+1}$. Comme $P_0 = 1$, une telle racine ne saurait exister. Soit alors x une racine de P_k, comme c_k n'est pas nul et x n'est pas racine de P_{k-1}, on a $P_{k+1}(x)P_{k-1}(x) = -c_k^2 P_{k-1}^2(x) < 0$.

   Cette question n'a posé aucune difficulté, la subtilité de l'absence de racines communes étant bien comprise.

   (c) Pour $k \in [\![1; n]\!]$, on note $(\mathbb{H}_k)$ le prédicat donné par : P_k est simplement scindé sur $\mathbf{R}$ et entre deux racines consécutives de P_k il y a exactement une racine de P_{k-1}.

   Comme P_1 est de degré 1, il est simplement scindé et le reste de l'assertion est tautologique puisque P_1 n'a qu'une seule racine.

   Soit maintenant k dans $[\![1; n-1]\!]$ tel que $(\mathbb{H}_k)$ soit vrai. On peut donc écrire $P_k = (X - x_1)\cdots(X - x_k)$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, puisqu'on a affaire à des polynômes unitaires, et, si $k > 1$, $P_{k-1} = (X - y_1)\cdots(X - y_{k-1})$ avec $x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < y_{k-1} < x_k$. En particulier $P_{k-1}(x_j)$ est du signe de $(-1)^{k-j}$. Il résulte de la question précédente que $P_{k+1}(x_j)$ est du signe de $(-1)^{k+1-j}$. Il résulte du théorème de BOLZANO dit des valeurs intermédiaires que P_{k+1} s'annule sur chacun des intervalles $]x_j; x_{j+1}[$ pour $1 \leqslant j < k$. On a également $P_{k+1}(x_k) < 0$ et P_{k+1} unitaire donc positif au voisinage de $+\infty$, donc P_{k+1} admet une racine strictement supérieure à x_k. Enfin $P_{k+1}(x_1)$ est du signe de $(-1)^k$, et du signe de $(-1)^{k+1}$ au voisinage de $-\infty$, donc possède une racine strictement inférieure à x_1. On en déduit $(\mathbb{H}_{k+1})$. L'assertion recherchée résulte donc du principe de récurrence : pour $k \in [\![1; n]\!]$, P_k est simplement scindé sur $\mathbf{R}$ et entre deux de ses racines consécutives se trouve exactement une racine de P_{k-1}.

3. Puisque $P_0 = 1$, s_0 est constant et vaut $+$. Comme deux polynômes d'indices successifs n'ont pas de racine commune, d'après les arguments donnés dans la question précédente, s_k est bien défini et vaut $+$ ou $-$. On en déduit que N est bien défini. Par continuité des fonctions polynomiales, les fonctions s_k et N sont constantes sur tous les intervalles ouverts ne contenant aucune racine des polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_n$. De plus toutes les fonctions s_k valent $+$ au voisinage de $+\infty$, et donc $N = 0$ au voisinage de $+\infty$. Soit maintenant k dans $[\![1; n-1]\!]$ et x une racine de P_k. On dispose d'un voisinage V de x dans $\mathbf{R}$ tel que x soit la seule racine de l'un des polynômes étudiés, dans V. Dans ce voisinage toutes les fonctions s_j sont constantes, sauf s_k. Or, au voisinage de ce x, s_{k-1} et s_{k+1} sont de signes contraires d'après la question 5.b), de sorte qu'il y a exactement un changement de signe dans la suite $(s_{k-1}(x), s_k(x), s_{k+1}(x))$ dans V, et donc N est constante sur V. Il en résulte que N est constante sur tout intervalle ne contenant aucune racine de P_n. Les arguments précédents montrent que si x est une racine de P_n et V est choisi comme précédemment, P_n change de signe en x. Plus précisément si les racines de P_n sont données par $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, alors s_n est du signe $(-1)^{n-k}$ à droite de x_k et du signe opposé à gauche. De par la propriété d'entrelacement s_{n-1} est de signe constant sur V égal à celui de $(-1)^{n-k}$. On

en déduit $\lim_{x^-} N = N(x) + 1$ et $\lim_{x^+} N = N(x)$. Par conséquent $N = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{]-\infty;x_k[}$ ou encore $N(x) = \mathrm{Card}(\{k \in [\![1;n]\!], x < x_k\}$. L'assertion en découle : le nombre de valeurs propres de A dans un intervalle $]a;b]$ est égal à $N(a) - N(b)$.

Les deux dernières questions de ce problème n'ont pas été réussies.

Partie III – Produits de Kronecker et de Hadamard

1. – Produit de Kronecker

(a) Par définition si A est non nul, $A \otimes B$ est nul si et seulement si B l'est. Par conséquent $A \otimes B = 0 \iff (A = 0 \vee B = 0)$. Si A et B ne sont pas nuls, on dispose d'un indice (i,j) tel que $a_{i,j}$ soit non nul et donc d'un bloc tel que $a_{i,j}B$ ne le soit pas. Si $A \otimes B = A' \otimes B'$ on en déduit d'une part que $a'_{i,j}$ n'est pas nul et d'autre part que B' est proportionnel à B, par un facteur non nul. *Mutatis mutandis* on en déduit que A' est proportionnel à A, par un facteur non nul. Réciproquement si α et β sont des complexes, alors $(\alpha A) \otimes (\beta B) = \alpha\beta A \otimes B$ et la non-nullité de $A \otimes B$ permet de conclure : $A \otimes B = A' \otimes B'$ si et seulement si $A = A' = 0$ ou $B = B' = 0$ ou bien il existe λ et μ dans $\mathbf{C}$, non nuls tous les deux, tels que $\lambda A + \mu A' = \mu B + \lambda B' = 0$.

Cette question, élémentaire pour un début de partie III, n'a pas suscité la rigueur nécessaire à son traitement, à savoir l'étude du cas de nullité.

(b) On vérifie directement que
la matrice représentative de $f_{A,B}$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{C})$, ordonnée sous la forme $((E_{ij})_{1\leqslant j\leqslant p})_{1\leqslant i\leqslant n}$, est $A \otimes B$.
Soit i et j deux entiers vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$. Le coefficient diagonal de la matrice représentative de $f_{A,B}$ correspondant à E_{ij} est donc celui du i^{e} bloc diagonal et dans celui-ci il s'agit du j^{e} bloc diagonal, c'est donc $a_{ii}b_{jj}$. On en conclut que la trace de $f_{A,B}$, qui est aussi celle de sa matrice représentative, est donnée par $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ii}b_{jj}$, i.e. $\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$.
On a $f_{A,B} = f_{A,I_p} \circ f_{I_n,B}$. Comme $I_n \otimes B$ est diagonal par blocs, on a immédiatement $\det(f_{I_n,B}) = \det(B)^n$. La matrice $A \otimes I_p$ est également diagonale par blocs (non connexes), ce que l'on peut plus aisément constater en exprimant f_{A,I_p} dans la base $((E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n})_{1\leqslant j\leqslant p}$. Il vient alors $\det(f_{A,I_p}) = \det(A)^p$. Par multiplicativité du déterminant on en conclut $\det(A \otimes B) = \det(A)^p \det(B)^n$.
Si A et B sont triangulaires supérieures, alors $A \otimes B$ aussi et sa diagonale est formée des produits $a_{ii}b_{jj}$, comme obtenu lors de l'étude de la trace. On en déduit qu'alors le spectre de $A \otimes B$ est, avec multiplicités, formé des produits $\lambda\mu$ avec λ et μ respectivement dans le spectre de A et celui de B. Puisque $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, A et B sont trigonalisables et on dipose de P et Q respectivement dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{GL}_p(\mathbf{C})$ tels que $P^{-1}AP$ et $Q^{-1}BQ$ soient triangulaires, avec le même spectre que A et B. De plus on a $f_{P^{-1}AP,Q^{-1}BQ} = f_{P^{-1},Q^{-1}} \circ f_{A,B} \circ f_{P,Q}$ et $f_{P^{-1},Q^{-1}} \circ f_{P,Q} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})}$, de sorte que $f_{A,B}$ et $f_{P^{-1}AP,Q^{-1}BQ}$ ont même spectre. On en conclut qu'en toute généralité
le spectre de $A \otimes B$ est, avec multiplicités, formé des produits $\lambda\mu$ avec λ et μ respectivement dans le spectre de A et celui de B, ce qu'on peut écrire $\mathrm{Sp}(A \otimes B) = \mathrm{Sp}(A) * \mathrm{Sp}(B)$.

Les deux premiers points ont été bien vus par les copies s'étant intéressées à cette question.

2. Puisqu'on a $\det(A \otimes B) = \det(A)^p \det(B)^n$, $A \otimes B$ est inversible si et seulement si A et B le sont. Comme dans ce cas on a $f_{A^{-1},B^{-1}} \circ f_{A,B} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})}$, on en déduit qu'alors $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

   On pouvait également raisonner directement sur l'application $f_{A,B}$. Une erreur surprenante a toutefois été constatée, i.e. $(A \otimes B)^{-1} = B^{-1} \otimes A^{-1}$, ce qui est impossible puisqu'a priori on a affaire à des matrices de tailles différentes dans les blocs.

3. Si A ou B est nul, alors $A \otimes B$ aussi et est donc diagonalisable. On suppose maintenant A et B non nuls. D'après le calcul de conjugaison effectué en question 7.b), si A et B sont diagonalisables, alors $A \otimes B$ aussi. Réciproquement, on se donne des décompositions de Dunford de A et B et, quitte à conjuguer A et B, on suppose qu'elles sont de la forme $A = D + N$ et $B = D' + N'$ avec D et D' diagonales, N et N' nilpotentes et triangulaires supérieures. On remarque alors que $D \otimes D'$, $N \otimes D'$, $D \otimes N'$ et $N \otimes N'$ commutent deux à deux. On pose $\widetilde{D} = D \otimes D'$ et $\widetilde{N} = N \otimes D' + D \otimes N' + N \otimes N'$, de sorte que $\widetilde{D}$ est diagonal, $\widetilde{N}$ est nilpotent et les deux commutent. On en conclut que $A \otimes B$ est diagonalisable si et seulement $\widetilde{N} = 0$. Les blocs diagonaux de $\widetilde{N}$ sont ceux de $D \otimes N'$ et ils sont donc nuls si et seulement si $D = 0$ ou $N' = 0$. On obtient, par changement de base, que $\widetilde{N} = 0 \implies (D' = 0 \vee N = 0)$. Si $D = 0$, on a $N \neq 0$ car A n'est pas nul, donc $D' = 0$, mais alors $\widetilde{N} = 0 \implies N \otimes N' = 0$ de sorte que $A = 0$ ou $B = 0$. On en conclut que D est non nul et, de même, que D' ne l'est pas non plus. Par conséquent $N = 0$ et $N' = 0$. En conclusion $A \otimes B$ est diagonalisable si et seulement si $A = 0$, $B = 0$ ou A et B sont tous deux diagonalisables.

   Cette question, ainsi que les suivantes, n'ont pas été réussies.

4. Puisque $A \otimes I_p$ et $I_n \otimes B$ commutent, l'exponentielle de leur somme est le produit de leurs exponentielles. Comme pour tout entier k on a $(A \otimes I_p)^k = A^k \otimes I_p$, il vient $\exp(A \otimes I_p) = \exp(A) \otimes I_p$ et, de même, $\exp(I_n \otimes B) = I_n \otimes \exp(B)$. On conclut par produit $\exp(A) \otimes \exp(B) = \exp(A \otimes I_p + I_n \otimes B)$.
5. On note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $D = \mathrm{diag}(d_i)$, $P = (p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $P^{-1} = (q_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Pour i entier vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$, on a donc $a_{ii} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} d_j q_{ji}$. Comme $p_{ij} q_{ji}$ est le coefficient d'indice (i,j) de $P \circ P^{-T}$, on en déduit $\vec{d}(A) = (P \circ P^{-T}) \vec{d}(D)$.
6. D'après la question 3.a) on dispose de $(x_1, \ldots, x_r)$, $(u_1, \ldots, u_r)$, $(y_1, \ldots, y_s)$ et $(v_1, \ldots, v_s)$ des familles libres dans $\mathbf{C}^n$, avec r et s les rangs respectifs de A et B, tels que $A = \sum_{i=1}^{r} u_i x_i^T$ et $B = \sum_{j=1}^{s} v_j y_j^T$. On en déduit $A \circ B = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} (u_i x_i^T) \circ (v_j y_j^T)$. Par conséquent il suffit de démontrer que $(u_i x_i^T) \circ (v_j y_j^T)$ est de rang au plus 1 pour conclure. Un calcul direct donne $(u_i x_i^T) \circ (v_j y_j^T) = (u_i \circ v_j)(x_i \circ y_j)^T$ et on conclut grâce à la question 1.a) qu'on a $\mathrm{rg}(A \circ B) \leqslant \mathrm{rg}(A)\,\mathrm{rg}(B)$.
7. Si A est de rang 1, d'après la question 3.b) on peut l'écrire $\lambda U U^T$ avec U unitaire et λ strictement positif, ou encore $V V^T$ avec $V = \sqrt{\lambda} U$. En posant $(v_1, \ldots, v_n)$ les coordonnées de V, on a $A = (v_i v_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et donc $B = (w_i w_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = W W^T$ en posant $w_i = 1/v_i$ et W le vecteur de coordonnées $(w_1, \ldots, w_n)$. On en déduit que B est de rang 1, de trace $\|W\|^2$ (par commutativité de la trace), et donc son spectre est inclus dans $\mathbf{R}_+$.

Réciproquement, d'après le théorème spectral on dispose de P orthogonale et D diagonale à coefficients positifs tels que $A = P^T DP$. Comme $D = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ avec les a_i positifs, on peut écrire $D = \Delta^2$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})$ puis $A = M^T M$ avec $M = \Delta P$. De même on peut écrire $B = N^T N$. En notant $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $N = (n_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, pour i et j dans $[\![1;n]\!]$, il vient $\left(\sum_{k=1}^{n} m_{ki}m_{kj}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} n_{\ell i}n_{\ell j}\right) = 1$, puis, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$1 = \left|\sum_{k=1}^{n} m_{ki}m_{kj}\right|\left|\sum_{\ell=1}^{n} n_{\ell i}n_{\ell j}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} m_{ki}^2 \sum_{k'=1}^{n} m_{k'j}^2 \sum_{\ell=1}^{n} n_{\ell i}^2 \sum_{\ell'=1}^{n} n_{\ell' j}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} m_{ki}^2 \sum_{\ell=1}^{n} n_{\ell i}^2\right)\left(\sum_{k'=1}^{n} m_{k'j}^2 \sum_{\ell'=1}^{n} n_{\ell' j}^2\right)} = 1\,,$$

en remarquant que les deux derniers produits de sommes sont obtenus en faisant $i = j$ dans l'égalité caractéristique de $A \circ B = \mathbf{1}$. Par égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (du fait de la stricte positivité de chacun des termes du produit), on en déduit que les vecteurs colonnes de M et de N sont liés. En particulier M est de rang au plus 1, donc A aussi, et comme A est non nulle, elle est de rang exactement égal à 1. Ainsi B appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ si et seulement si A est de rang 1.

8. – Produit de Hadamard et matrices symétriques

   (a) Dans l'interprétation de la question 7.b) $A \circ B$ correspond à la matrice principale obtenue en ne conservant que les vecteurs $(E_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}$ de la base canonique.

   (b) Si A et B sont symétriques, alors $A \otimes B$ l'est aussi. De plus, d'après la question 7.b) si les spectres de A et B sont strictement positifs, alors celui de $A \otimes B$ aussi. Par conséquent $A \circ B$ est la matrice d'une bi-restriction de l'endomorphisme symétrique défini positif associé canoniquement à $A \otimes B$, et on en conclut que $A \circ B$ appartient alors à $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

   (c) L'argument précédent s'applique *mutatis mutandis* en remplaçant strictement positif par positif, et donc $A \circ B$ appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ dès que A et B y appartiennent.

   (d) Soit x dans $\mathbf{R}^n$ et $B = xx^T$. Alors B appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ et donc $A \circ B$ aussi. Si $u = e_1 + \cdots + e_n$, on a donc $\langle (A \circ B)u \,|\, u\rangle \geqslant 0$, ce qui s'écrit $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \geqslant 0$, i.e. $\langle Ax \,|\, x\rangle \geqslant 0$. Il en résulte $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$.

Partie IV – Une application

1. On considère l'espace $L^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ muni de son produit scalaire canonique et son sous-espace vectoriel de dimension finie F engendré par les fonctions $(t \mapsto \exp(\lambda_k t))_{1\leqslant k\leqslant n}$. Ces fonctions forment une famille libre car ce sont des vecteurs propres de l'opérateur dérivée pour des valeurs propres distinctes. Par stricte positivité des scalaires, ce sont des fonctions de carré intégrable sur $\mathbf{R}_+$, de sorte que la matrice $\left(\dfrac{1}{\lambda_i + \lambda_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la matrice de Gram associée à cette base de F, i.e. la matrice du produit scalaire. Par conséquent $\left(\dfrac{1}{\lambda_i + \lambda_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

   Les copies qui se sont intéressées à la question ont introduit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ce qui avait peu d'intérêt. Pourtant les matrices de Gram *sont exactement les matrices symétriques définies positives : c'est encore une fois une interprétation du théorème spectral. En écrivant $A = P^T DP$, $D = \Delta^2 = \Delta^T\Delta$ et $M = \Delta P$, il vient $A = M^T M$.*

2. Par continuité de la transposition et de la multiplication matricielle, donc des applications $M \mapsto X^T MX$ pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. De plus la somme de deux matrices symétriques réelles l'une positive et l'autre définie positive est symétrique réelle définie positive, donc une somme d'une série convergente de matrices symétriques réelles positives dont l'une au moins est définie positive est définie positive.

   Par stabilité de $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, vue en question 14.a), toutes les matrices $\left(\dfrac{1}{(\lambda_i+\lambda_j)^k}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ le sont aussi pour k entier strictement positif. Comme la matrice $\mathbf{1}$ est symétrique réelle positive, par sommation coefficient par coefficient, ce qui est licite par convergence de l'exponentielle sur $\mathbf{R}$, on obtient $\left(e^{1/(\lambda_i+\lambda_j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

   Les quelques copies qui ont tenté cette question ont confondu l'exponentielle matricielle avec l'exponentielle coefficient par coefficient. Pourtant cette partie était annoncée comme une application de la précédente.

Partie V – Gain relatif

1. Pour M dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ la condition $M \geqslant I_n$ s'écrit : pour tout x dans $\mathbf{R}^n$, $x^T(M-I_n)x \geqslant 0$ i.e. $x^T Mx \geqslant \|x\|^2$. De même pour λ réel, $M \leqslant \lambda I_n$ s'écrit : $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $x^T Mx \leqslant \lambda\|x\|^2$.

   Soit A dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. D'après la question 3.b) on dispose d'une famille orthonormée $(v_1,\dots,v_r)$ dans $\mathbf{R}^n$ et de scalaires non nuls $(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ tels que $A = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k \otimes v_k^*$. Puisque S est de rang n, on a $r = n$ et puisque son spectre est strictement positif, les scalaires le sont. On a $A^{-1} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{-1} v_k \otimes v_k^*$. Donc, en notant $v_{k;i}$ les coordonnées de v_k, pour i et j entiers dans $[\![1;n]\!]$, le coefficient d'indice (i,j) de $\Phi(A)$ est donné par $\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_{k;i}v_{k;j}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell^{-1} v_{\ell;i}v_{\ell;j}\right)$. Soit alors x dans $\mathbf{R}^n$, de coordonnées notées x_i, on a donc

   $$x^T\Phi(A)x = \sum_{1\leqslant i,j,k,\ell\leqslant n} \frac{\lambda_k}{\lambda_\ell} x_i x_j v_{k;i}v_{k;j}v_{\ell;i}v_{\ell;j} = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \frac{\lambda_k}{\lambda_\ell}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_{k;i}v_{\ell;i}\right)^2 .$$

   Remarquons que si tous les λ_k sont égaux à 1, on a $A = I_n$ et donc $\Phi(A) = I_n$, de sorte qu'on a

   $$\|x\|^2 = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_{k;i}v_{\ell;i}\right)^2 .$$

   La fonction $t \mapsto t + \frac{1}{t}$ est croissante sur $[1;+\infty[$, de sorte que pour tous k et ℓ distincts dans $[\![1;n]\!]$ on a $1+1 \leqslant \frac{\lambda_k}{\lambda_\ell} + \frac{\lambda_\ell}{\lambda_k} \leqslant \kappa(A)+\kappa(A)^{-1}$ et, si $k=\ell$, $1 = \frac{\lambda_k}{\lambda_\ell} \leqslant \frac{1}{2}\left(\kappa(A)+\kappa(A)^{-1}\right)$. En multipliant ces inégalités par la quantité positive $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_{k;i}v_{\ell;i}\right)^2$, puis en sommant il vient en tenant compte de la remarque : $I_n \leqslant \Phi(A) \leqslant \frac{1}{2}(\kappa(A)+\kappa(A)^{-1})I_n$.

2. En particulier, d'après la question précédente, si λ est une valeur propre de A, et x un vecteur propre associé, $\|x\|^2 \leqslant \lambda\|x\|^2 \leqslant \frac{1}{2}(\kappa(A)+\kappa(A)^{-1})\|x\|^2$, d'où $1 \leqslant \min \mathrm{Sp}(A)$ et $\max \mathrm{Sp}(A) \leqslant \frac{1}{2}(\kappa(A)+\kappa(A)^{-1})$ et donc $\kappa(\Phi(A)) \leqslant \frac{1}{2}(\kappa(A)+\kappa(A)^{-1})$.

3. Soit deux suites définies par $u_0 = v_0 = \kappa(A)$ et, pour m entier strictement positif, $u_m = \kappa(\Phi^m(A))$ et $v_m = \frac{1}{2}\left(v_{m-1} + \frac{1}{v_{m-1}}\right)$. Par croissance de la fonction $t \mapsto t + \frac{1}{t}$ sur $[1;+\infty[$ et d'après la

question précédente, il vient par récurrence : $\forall m \in \mathbf{N}\ 1 \leqslant u_m \leqslant v_m$. Comme la suite (v_m) est une suite récurrente associée à une fonction continue sur $[1; +\infty[$, qu'elle est décroissante minorée par 1, elle converge vers l'unique point fixe de la fonction associée sur $[1; +\infty[$, i.e. 1. Par encadrement des limites on en déduit que (u_m) tend vers 1.

Il résulte de la question 17) que pour tout x dans $\mathbf{R}^n$ et tout m dans $\mathbf{N}\backslash\{0\}$, on a $\|x\|^2 \leqslant x^T\Phi^{m+1}(A)x \leqslant \frac{1}{2}(u_m + \frac{1}{u_m})\|x\|^2$ et donc, par encadrement des limites, $\lim x^T\Phi^m(A)x = \|x\|^2$. Par polarisation on en déduit que pour tous x et y dans $\mathbf{R}^n$, on a $\lim x^T\Phi^m(A)y = x^Ty$. En spécialisant en des vecteurs de la base canonique, on obtient la convergence de $\Phi^m(A)$ vers l'identité, coefficient par coefficient, et donc $\lim \Phi^m(A) = I_n$.

Cette partie n'a essentiellement pas été abordée.

Partie VI – Complément de Schur

1. Comme $d = e_1^TMe_1$, il est strictement positif et donc le complément de Schur est bien défini. Soit maintenant x dans $\mathbf{R}^{n-1}$ non nul, t dans $\mathbf{R}$ et X_t le vecteur de $\mathbf{R}^n$ ayant t comme première coordonnée et ensuite celles de x. On a donc $X_t^TMX_t = dt^2 + 2tV^Tx + x^TNx$ et cette quantité est strictement positive pour tout t. On en déduit $(V^Tx)^2 - dx^TNx < 0$, i.e. $dx^T\widetilde{M}x > 0$. Comme N est symétrique réelle, puisque M l'est, et que VV^T aussi, on en conclut que $\widetilde{M}$ appartient à $\mathscr{S}_{n-1}^{++}(\mathbf{R})$.

2. En gardant les notations de la question précédente on a $M\begin{pmatrix}1 & -d^{-1}V^T\\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d & 0\\ V & \widetilde{M}\end{pmatrix}$ de sorte que, par multiplicativité du déterminant et puisque la matrice du second membre est triangulaire par blocs, $\det(M) = d\det(\widetilde{M})$. Le résultat en découle par récurrence : $\det(M) = \prod_{k=1}^{n} d_k$.

3. – Déterminant d'un produit de Hadamard
   (a) On écrit $A = \begin{pmatrix}d & V^T\\ V & N\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}d' & W^T\\ W & N'\end{pmatrix}$, de sorte qu'on a $A\circ B = \begin{pmatrix}dd' & (V\circ W)^T\\ V\circ W & N\circ N'\end{pmatrix}$ et donc $\widetilde{A\circ B} = N\circ N' - (dd')^{-1}(V\circ W)(V\circ W)^T$. Avec des notations évidentes, on a $V\circ W = (v_iw_i)$ et donc $(V\circ W)(V\circ W)^T = (v_iw_iv_jw_j) = (VV^T)\circ(WW^T)$. Il vient ainsi $\widetilde{A\circ B} = N\circ\widetilde{B} + (d')^{-1}N\circ(WW^T) - (dd')^{-1}(VV^T)\circ(WW^T)$, i.e. $\widetilde{A\circ B} = N(A)\circ\widetilde{B} + d(B)^{-1}\widetilde{M}\circ(WW^T)$.
   Or $\widetilde{M}$ appartient à $\mathscr{S}_{n-1}^{++}(\mathbf{R})$ d'après la question 20), et WW^T à $\mathscr{S}_{n-1}^{+}(\mathbf{R})$, donc d'après la question 14.c) il en va de même pour $\widetilde{M}\circ(WW^T)$. Notons $S = N(A)\circ\widetilde{B}$. Il résulte du fait que $N(A)$ est une matrice principale extraite de A et de la question 20) qu'on a affaire à un produit de Hadamard de deux matrices dans $\mathscr{S}_{n-1}^{++}(\mathbf{R})$, et donc à une matrice dans $\mathscr{S}_{n-1}^{++}(\mathbf{R})$ d'après la question 14.b). On dispose alors de C dans $\mathscr{S}_{n-1}^{++}(\mathbf{R})$ tel que $C^2 = S$, par exemple en écrivant $S = \sum_{i=1}^{n}\lambda_iv_i\otimes v_i^*$ et en prenant $C = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i}v_i\otimes v_i^*$. On note $R = d(B)^{-1}\widetilde{M}\circ(WW^T)$ et on remarque $S + R = C(I_{n-1} + C^{-1}RC^{-1})C$. Comme $C^{-1}RC^{-1}$ est symétrique réelle, car C l'est, et positive, car R l'est, ses valeurs propres sont toutes positives et donc $\det(I_{n-1} + C^{-1}RC^{-1}) \geqslant 1$, de sorte qu'on a $\det(S+R) \geqslant \det(C)^2 = \det(S)$. L'assertion résulte donc de la question 21) par positivité de $d(A)$ et $d(B)$: $\det(A\circ B) \geqslant d(A)d(B)\det(N(A)\circ\widetilde{B})$.
   (b) L'assertion résulte d'une récurrence sur la taille des matrices considérées. En effet $N(A)$ et $\widetilde{B}$ appartiennent à $\mathscr{S}_{n-1}^{++}(\mathbf{R})$ et donc, si $\det(N(A)\circ\widetilde{B}) \geqslant \Delta(N(A))\det(\widetilde{B})$, comme on a $d(A)\Delta(N(A)) = \Delta(A)$ par définition et $d(B)\det(\widetilde{B}) = \det(B)$ d'après la question 21), la

question précédente donne $\det(A \circ B) \geqslant \Delta(A)\det(B)$. Comme l'assertion est tautologique pour $n = 1$, l'assertion en découle par récurrence : (inégalité de A. OPPENHEIM) $\det(A \circ B) \geqslant \Delta(A)\det(B)$.

(c) Si A ou B n'est pas inversible le membre de droite est nul et celui de gauche est positif puisque, d'après la question 14.c), on a affaire au déterminant d'une matrice symétrique réelle positive. On suppose donc A et B définies positives. D'après la question précédente il suffit de démontrer $\det(A) \leqslant \Delta(A)$ (inégalité de HADAMARD). Par homogénéité on se ramène au cas où tous les éléments diagonaux de A sont égaux à 1, e.g. en posant $D = \operatorname{diag}(\sqrt{a_{11}}, \dots, \sqrt{a_{nn}})^{-1}$ et en étudiant DAD. Par inégalité arithmético-géométrique $\det(A)$, qui est le produit des valeurs propres de A, donc la puissance n^{e} de leur moyenne géométrique, est inférieur à la puissance n^{e} de leur moyenne arithmétique, i.e. à $(\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(A))^n$, soit $\det(A) \leqslant 1 = \Delta(A)$. On en conclut : $\det(A \circ B) \geqslant \det(A)\det(B)$.

Cette partie n'a essentiellement pas été abordée.

Partie I

1. On cherche une fonction $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que x est solution de l'équation :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = J_1 \nabla H \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), x'(t)) \\ \frac{\partial H}{\partial \xi}(x(t), x'(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \xi}(x(t), x'(t)) \\ -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), x'(t)) \end{pmatrix}.$$

Il suffit donc de choisir H telle que pour tous réels x et ξ :

$$\frac{\partial H}{\partial \xi}(x, \xi) = \xi \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial x}(x, \xi) = V'(x).$$

Puisque V est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, la fonction $H : (x, \xi) \mapsto \frac{\xi^2}{2} + V(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ et convient donc.

Cette question, dont l'objectif était de se familiariser avec les notations de l'énoncé, n'a pas posé de problème particulier, hormis la vérification de la régularité de H et le respect des notations.

2. Ici $H : (x, \xi) \mapsto \frac{x^2 + \xi^2}{2}$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ et pour tous réels x et ξ, $\nabla H(x, \xi) = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$. Ainsi, l'équation vérifiée par le flot se réécrit, pour tous réels x et ξ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x, \xi) = J_1 \Phi(t, x, \xi) \quad \text{et} \quad \Phi(0, x, \xi) = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tous réels x et ξ, la solution maximale de ce problème de CAUCHY linéaire est bien définie sur $I_{x,\xi} = \mathbf{R}$ et

$$\Phi : (t, x, \xi) \mapsto \exp(tJ_1) \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}.$$

Or $J_1^2 = -I_2$ donc pour tout k dans $\mathbf{N}$:

$$J_1^{2k} = (-1)^k I_2 \quad \text{et} \quad J_1^{2k+1} = (-1)^k J_1.$$

Ainsi, pour tout t réel :

$$\exp(tJ_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} I_2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} J_1 = \cos(t) I_2 + \sin(t) J_1 = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Et donc finalement, pour tous t, x, ξ réels :

$$\Phi(t,x,\xi) = \begin{pmatrix} x\cos(t) + \xi\sin(t) \\ -x\sin(t) + \xi\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Rares sont les copies ayant cité un théorème pour justifier la définition de la solution maximale sur $\mathbf{R}$. Par ailleurs, la plupart des candidats et candidates ayant traité cette question ont préféré se ramener à deux équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 plutôt que de manipuler une équation différentielle linéaire vectorielle d'ordre 1.

3. Ici $H : (x,\xi) \mapsto h(x)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ et pour tous réels x et ξ :

$$J_1\nabla H(x,\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \xi}(x,\xi) \\ -\frac{\partial H}{\partial x}(x,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -h'(x) \end{pmatrix}.$$

Notons, pour tout (t,x,ξ) dans $I_{x,\xi}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $\Phi_1(t,x,\xi)$ et $\Phi_2(t,x,\xi)$ les coordonnées du vecteur $\Phi(t,x,\xi)$ dans $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. L'équation vérifie par le flot se réécrit ici :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}(t,x,\xi) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}(t,x,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -h'(\Phi_1(t,x,\xi)) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi(0,x,\xi) = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tous réels x, ξ, la fonction $t \mapsto \Phi_1(t,x,\xi)$ est constante, égale à x. Et par ailleurs, on a pour tout t dans $I_{x,\xi}$:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}(t,x,\xi) = -h'(x).$$

Ainsi, pour tous réels x et ξ, la solution maximale de ce problème de Cauchy est bien définie sur $I_{x,\xi} = \mathbf{R}$ et

$$\Phi : (t,x,\xi) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \xi - h'(x)t \end{pmatrix}.$$

Là encore, rares sont les copies s'étant souciées de l'intervalle de définition de la solution maximale.

4. Considérons pour tout t réel, $f(t) = x(t)\exp\left(-\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\right)$. f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout réel s :

$$f'(t) = \exp\left(-\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\right) \times (x'(t) - a(t)x(t)) \leqslant 0.$$

Ainsi, f est décroissante et $f(0) = x(0)$. Donc pour tout t dans $\mathbf{R}_+$, $f(t) \leqslant x(0)$. Et puisque exp est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, on en déduit :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad x(t) \leqslant x(0)\exp\left(\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\right).$$

La plupart des copies ont reconnu le lemme de Grönwall, au programme de l'agrégation, et ont plutôt bien réussi à restituer sa démonstration. Certaines copies ont, sans succès, étudié la différence plutôt que le quotient des deux fonctions à comparer.

5. Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} Cx^r & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $r > 1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. La condition d'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz local s'applique donc. Or la fonction nulle est solution de l'équation différentielle $x' = f(x)$. Ainsi, si y s'annule, elle est nulle. Puisque $y(0) > 0$, on en déduit que y ne s'annule pas.

La plupart des copies ont reconnu un cas d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz *local. Cependant, rares sont celles qui ont pensé à prolonger $x \mapsto Cx^r$ sur un voisinage de* 0.

6. Puisque y est continue et ne s'annule pas sur I, elle y est de signe constant. Or $y(0) > 0$, donc pour tout t dans I, $y(t) > 0$ et :

$$(1-r)y'(t)y(t)^{-r} = -(r-1)C$$

et donc en primitivant, on a pour tout t dans I :

$$y(t)^{1-r} = y_0^{1-r} - (r-1)Ct = y_0^{1-r}\left(1 - C(r-1)y_0^{r-1}t\right)$$

En particulier, pour tout t dans I : $C(r-1)y_0^{r-1}t \leqslant 1$. Donc $\sup I \leqslant \frac{1}{C(r-1)y_0^{r-1}}$ et

$$\forall t \in I, \quad y(t) = \frac{y_0}{\left(1 - C(r-1)y_0^{r-1}t\right)^{\frac{1}{r-1}}}.$$

Réciproquement, la fonction $t \mapsto \frac{y_0}{\left(1-C(r-1)y_0^{r-1}t\right)^{\frac{1}{r-1}}}$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\left]-\infty, \frac{1}{C(r-1)y_0^{r-1}}\right[$ et y est solution de l'équation différentielle $y' = Cy^r$ et vaut y_0 en 0. Ainsi, puisque y est maximale, on en déduit bien :

$$\sup I = \frac{1}{C(r-1)y_0^{r-1}}.$$

Cette question a souvent été traitée de manière purement calculatoire, sans la moindre précaution : division par 0, élévation d'un nombre réel négatif à la puissance r non entière. Ici, la détermination de la borne supérieure de I et d'une expression de y devait être traitée simultanément.

7. (a) Soit t dans $[0, m[$. Pour tout s dans $[0, t]$, s n'appartient pas à A, donc $x(s) \leqslant y(s)$ et donc puisque $u \mapsto Cu^r$ est croissante, $x'(s) \leqslant Cx^r(s) \leqslant Cy^r(s) = y'(s)$. Ainsi,

$$\forall s \in [0, t], \quad x(s) = x(0) + \int_0^s x'(u)\mathrm{d}u \leqslant x(0) + \int_0^s y'(u)\mathrm{d}u = x(0) + y(s) - y_0.$$

En particulier, $x(t) \leqslant x(0) - y(0) + y(t)$. Or $x(0) < y_0$ donc
— pour tout t dans $[0, m[$, $x(t) < y(t)$.
— Puisque $m \in [0, M[$, x et y sont continues en m donc $x(m) \leqslant x(0) - y_0 + y(m) < y(m)$.
Finalement, on a bien pour tout t dans $[0, m]$, $x(t) < y(t)$.

(b) Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A qui tend vers A. On a donc pour tout n dans $\mathbf{N}$, $x(t_n) > y(t_n)$. Et puisque x et y sont continues en m, $x(m) \geqslant y(m)$. C'est en contraction avec le résultat montré dans la question précédente. Donc A est vide, c'est-à-dire :

$$\forall t \in [0, M[, \quad x(t) \leqslant y(t).$$

Partie II

8. Soit f et g deux symplectomorphismes, f réalisant une bijection d'un ouvert V de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ sur un ouvert W de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ et g d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ sur V. $f \circ g$ réalise une bijection de U et W, est bien différentiable sur U et de réciproque différentiable sur W.
Soit (x, ξ) dans U. On a la relation :
$$J_{f\circ g}(x,\xi) = J_f(g(x,\xi))J_g(x,\xi).$$
$J_f(g(x,\xi))$ et $J_g(x,\xi)$ sont des matrices symplectiques, donc il suffit de montrer que le produit de deux matrices symplectiques est encore une matrice symplectique. Soit A et B deux matrices symplectiques dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$.
$$(AB)^T J_n AB = B^T A^T J_n AB = B^T J_n B = J_n,$$
donc AB est encore une matrice symplectique, ce qui achève la preuve.

Ici encore, cette question a été généralement été de manière purement calculatoire, sans penser à vérifier tous les points de la définition d'un symplectomorphisme.

9. Soit k dans $[\![1;n]\!]$. $H \circ f$ est bien différentiable sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ et pour tout (x,ξ) dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$:
$$\frac{\partial(H\circ f)}{\partial x_k}(x,\xi) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x,\xi)\frac{\partial H}{\partial x_j}(f(x,\xi)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{j+n}}{\partial x_k}(x,\xi)\frac{\partial H}{\partial \xi_j}(f(x,\xi)).$$
et
$$\frac{\partial(H\circ f)}{\partial \xi_k}(x,\xi) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \xi_k}(x,\xi)\frac{\partial H}{\partial x_j}(f(x,\xi)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{j+n}}{\partial \xi_k}(x,\xi)\frac{\partial H}{\partial \xi_j}(f(x,\xi)).$$
et donc :
$$\nabla(H\circ f)(x,\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,\xi) & \cdots & \frac{\partial f_{2n}}{\partial x_1}(x,\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x,\xi) & \cdots & \frac{\partial f_{2n}}{\partial x_n}(x,\xi) \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}(x,\xi) & \cdots & \frac{\partial f_{2n}}{\partial \xi_1}(x,\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi_n}(x,\xi) & \cdots & \frac{\partial f_{2n}}{\partial \xi_n}(x,\xi) \end{pmatrix} \nabla H(f(x,\xi)) = J_f(x,\xi)^T \nabla H(f(x,\xi)).$$

Le calcul des dérivées partielles d'une fonction composée a bloqué une grande partie des copies ayant abordé cette question.

10. On a la relation $M^T J_n M = J_n$. Or un calcul par blocs donne $J_n^2 = -I_{2n}$, donc $J_n M^T J_n M = -I_{2n}$. Ainsi, la matrice $J_n M$ est inversible d'inverse $-J_n M^T$. En particulier, M est inversible et de plus,
$$M^{-1}J_n^{-1} = -J_n M^T.$$
Or $J_n^{-1} = -J_n$ donc $M^{-1}J_n = J_n M^T$.

Cette question n'a pas posé de problème

11. Soit (x,ξ) dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

On a déjà $\Psi(0,x,\xi) = f^{-1}(\Phi(0,f(x,\xi)) = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$.

Soit maintenant t dans $I_{f(x,\xi)}$. Ψ est bien dérivable par rapport à la première variable en (t,x,ξ) et :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t,x,\xi) = J_{f^{-1}}(\Phi(t,f(x,\xi)))\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,f(x,\xi)) = J_{f^{-1}}(\Phi(t,f(x,\xi)))J_n \nabla H(\Phi(t,f(x,\xi))).$$

Donc

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t,x,\xi) = J_{f^{-1}}(f(\Psi(t,x,\xi)))J_n \nabla H(f(\Psi(t,x,\xi))).$$

Il suffit donc de démontrer que pour tout (t,x,ξ) dans $I_{f(x,\xi)} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$:

$$J_{f^{-1}}(f(\Psi(t,x,\xi)))J_n \nabla H(f(\Psi(t,x,\xi))) = J_n \nabla (H \circ f)(\Psi(t,x,\xi)).$$

Il suffit donc de démontrer que pour tout (x,ξ) dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$:

$$(\star) \quad J_{f^{-1}}(f(x,\xi))J_n \nabla H(f(x,\xi)) = J_n \nabla (H \circ f)(x,\xi).$$

Or d'après la question 9, $J_n \nabla (H\circ f)(x,\xi) = J_n J_f(x,\xi)^T \nabla H(f(x,\xi))$. Et d'après la question 10, puisque $J_f(x,\xi)$ est une matrice symplectique :

$$J_{f^{-1}}(f(x,\xi))J_n = J_f(x,\xi)^{-1}J_n = J_n J_f(x,\xi)^T.$$

On a donc l'égalité $(\star)$, ce qui achève la preuve.

Le calcul de la matrice jacobienne de f^{-1} a posé problème. La quasi-totalité des copies s'est arrêtée à cette question.

12. (a) f est un difféomorphisme d'un voisinage $U =]0, 2r_0[\times]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[$ de (r_0,θ_0) dans un voisinage de $f(r_0,\theta_0)$. Soit (r,θ) dans U.

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2r}}\cos\theta & -\sqrt{2r}\sin\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2r}}\sin\theta & \sqrt{2r}\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2r}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2r} \end{pmatrix}.$$

Or

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2r}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2r} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2r}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2r}} \\ -\sqrt{2r} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2r}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $J_f(r,\theta)$ est le produit de deux matrices symplectiques donc est encore une matrice symplectique, comme on l'a démontré précédemment. Finalement, f est bien un symplectomorphisme d'un voisinage de (r_0,θ_0) dans un voisinage de $f(r_0,\theta_0)$.

(b) $H \circ f$ est la fonction $(r,\theta) \mapsto h(r)$. Donc comme on l'a démontré à la question 3, le flot engendré par $H \circ f$ est :

$$\Psi : (t,r,\theta) \mapsto \begin{pmatrix} r \\ \theta - h'(r)t \end{pmatrix}.$$

Soit Φ le flot engendré par H au voisinage de $f(r_0,\theta_0)$. Posons, pour (x,ξ) dans un voisinage de (r_0,θ), $(r,\theta) = f^{-1}(x,\xi)$. Alors pour tout t dans un voisinage de 0 :

$$\Phi(t,x,\xi) = \begin{pmatrix} \sqrt{2r}\cos(\theta - h'(r)t) \\ \sqrt{2r}\sin(\theta - h'(r)t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le flot décrit des arcs de cercle avec une « vitesse angulaire » constante.

Partie III

13. Notons H la matrice hessienne de V en 0. Puisque V admet un minimum local E en 0, on a au voisinage de 0 :

$$V(x) = E + \frac{1}{2}x^T Hx + O(\|x\|^3).$$

H est définie positive, donc il existe une matrice orthogonale P et des réels strictements positifs $\theta_1,\dots,\theta_n$ tels que $H = P^T \begin{pmatrix} \theta_1^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \theta_n^2 \end{pmatrix} P$. En posant $Q = P^{-1}$, Q est orthogonale et au voisinage de 0 :

$$V(Qx) = E + \frac{1}{2}x^T \begin{pmatrix} \theta_1^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \theta_n^2 \end{pmatrix} x + O(\|Qx\|^3) = E + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \theta_k^2 x_k^2 + O(\|x\|^3).$$

14. Soit M une matrice inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $f : (x,\xi) \mapsto (Mx, (M^T)^{-1}\xi)$. f est une application linéaire et bijective de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même et $f^{-1} : (x,\xi) \mapsto (M^{-1}x, M^T\xi)$. En particulier, f est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même et J_f est constante égale à $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & (M^T)^{-1} \end{pmatrix}$. Donc

$$J_f^T J_n J_f = \begin{pmatrix} M^T & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & (M^T)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M^T \\ -M^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & (M^T)^{-1} \end{pmatrix} = J_n.$$

Donc f est bien un symplectomorphisme.

15. Puisque V est paire par rapport à chacune de ses variables, on a au voisinage de 0 :

$$V(Qx) = E + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \theta_k^2 x_k^2 + O(\|x\|^4).$$

Posons pour tout x dans $\mathbf{R}^n$,

$$w(x) = V(Qx) - E - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \theta_k^2 x_k^2.$$

Soit D dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\sqrt{\theta_1},\dots,\sqrt{\theta_n}$. D est bien définie et inversible puisque $\theta_1,\dots,\theta_n$ sont tous strictement positifs. On pose alors $\phi_1 : (x,\xi) \mapsto (QD^{-1}x, QD\xi)$.

D^{-1} est symétrique et Q orthogonale donc

$$((QD^{-1})^T)^{-1} = (D^{-1}Q^T)^{-1} = (D^{-1}Q^{-1})^{-1} = QD.$$

Donc d'après la question précédente, ϕ_1 est un symplectomorphisme et au voisinage de $(0,0)$:

$$\begin{aligned} H \circ \phi_1(x,\xi) &= E + \frac{1}{2}\|QD\xi\|^2 + V(QD^{-1}x) \\ &= E + \frac{1}{2}\|D\xi\|^2 + V(QD^{-1}x) \\ &= E + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{\theta_k}\xi_k)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k^2\left(\frac{x_k}{\sqrt{\theta_k}}\right)^2 + w(QD^{-1}x) \\ &= E + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\frac{x_k^2+\xi_k^2}{2} + w(QD^{-1}x). \\ &= H_1 \circ p(x,\xi) + w(QD^{-1}x). \end{aligned}$$

Il suffit de poser, pour tout x dans $\mathbf{R}^n$, $W(x) = w(QD^{-1}x)$. On a, pour x au voisinage de 0, $w(x) = O(\|x\|^4)$. Donc puisque $x \mapsto QD^{-1}x$ est lipschitzienne car linéaire en dimension finie, on en déduit $W(x) = O(\|x\|^4)$.

Partie IV

16. Soit (x,ξ) dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ et t dans $I_{x,\xi}$. $G \circ \Phi$ est bien dérivable par rapport à la première variable en (t,x,ξ) et :

$$\frac{\partial(G\circ\Phi)}{\partial t}(t,x,\xi) = \nabla G(\Phi(t,x,\xi))^T\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,x,\xi) = \nabla G(\Phi(t,x,\xi))^T J_n \nabla F(\Phi(t,x,\xi)).$$

Or, comme on l'a remarqué dans le préambule, $\{G,F\} = (\nabla G)^T J_n \nabla F$ donc :

$$\frac{\partial(G\circ\Phi)}{\partial t}(t,x,\xi) = \{G,F\}\circ\Phi(t,x,\xi).$$

17. Soit k dans $[\![1;n]\!]$. Les dérivées partielles de p_k et F sont des fonctions polynomiales homogènes de degré 1 et $d-1$ respectivement, donc $\{p_k,F\}$ est une somme de fonctions polynomiales homogènes de degré d, donc une fonction polynomiale homogène de degré d.

18. (a) f est dérivable sur $I_{x,\xi}$ et d'après la question 16, pour tout t dans $I_{x,\xi}$:

$$f'(t) = 2\sum_{k=1}^{n}\{p_k,F\}\circ\Phi(t,x,\xi).$$

Puisque pour tout k dans $[\![1;n]\!]$, $\{p_k,F\}$ est polynomiale homogène de degré d, il existe un réel $C>0$ tel que pour tout t dans $I_{x,\xi}$:

$$f'(t) \leqslant C\|\Phi(t,x,\xi)\|^d = Cf(t)^{d/2}.$$

(b) Posons $r = d/2$. r est un réel strictement supérieur à 1, donc on peut utiliser les résultats des questions 6 et 7. Puisque

$$\frac{1}{C(r-1)u^{r-1}} \underset{u\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty,$$

on peut choisir un réel $y_0 > 0$ tel $\frac{1}{C(r-1)y_0^{r-1}} > 1$. On choisit ensuite deux réels M et R strictement positifs tels que :

$$1 < M < \frac{1}{C(r-1)y_0^{r-1}} \quad \text{et} \quad R^2 < y_0.$$

Soit y la solution maximale de l'équation $y' = Cy^r$ vérifiant $y(0) = y_0$. y est définie sur un intervalle I tel que $\sup I = \frac{1}{C(r-1)y_0^{r-1}}$.

Soit U la boule de centre 0 et de rayon R dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Pour tout (x, ξ) dans cette boule, la fonction f de l'énoncé vérifie $f(0) = \|\Phi(0, x, \xi)\|^2 = \|(x, \xi)\|^2 \leqslant R^2 < y_0$.

Si $1 \notin I_{x,\xi}$, alors, puisque $M > 1$, $I_{x,\xi} \cap \mathbf{R}_+ = I_{x,\xi} \cap [0, M[\cap \mathbf{R}_+$. Ainsi, d'après la question 7,

$$\forall t \in I_{x,\xi} \cap \mathbf{R}_+, \quad f(t) \leqslant y(t) \leqslant y(1).$$

Cela contredit le théorème de sortie de tout compact, donc $1 \in I_{x,\xi}$. En particulier, $(x, \xi) \mapsto \Phi(t, x, \xi)$ est bien définie sur $[0, 1]$.

(c) En reprenant les notations de la question précédente, on a pour tout (x, y) dans U,

$$\|\Phi(1, x, \xi)\|^2 \leqslant y(1) = \frac{y_0}{\left(1 - C(r-1)y_0^{r-1}\right)^{\frac{1}{r-1}}},$$

où la dernière égalité a été obtenue à la question 6. Or pour (x, ξ) de norme suffisamment petite, on peut choisir $y_0 = 2\|(x, y)\|^2$ en gardant toutes les conditions de la question précédente.

Ainsi, au voisinage de $(0, 0)$, on a bien $\|\Phi(1, x, \xi)\| = O(\|(x, \xi)\|)$.

(d) Soit (x_0, ξ_0) dans U. Notons, pour tout t dans $[0, 1]$, $J(t)$ la matrice jacobienne de $(x, \xi) \mapsto \Phi(t, x, \xi)$ en (x_0, ξ_0) et $H(t)$ la matrice hessienne de F en $\Phi(t, x_0, \xi_0)$. D'après le théorème de Schwarz, on obtient en différentiant la relation définissant Φ :

$$\forall t \in [0, 1], \quad J'(t) = J_n H(t) J(t).$$

Soit $g : t \mapsto J(t)^T J_n J(t)$. g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout t dans $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= J'(t)^T J_n J(t) + J(t)^T J_n J'(t) \\ &= J(t)^T H(t) J_n^T J_n J(t) + J(t)^T J_n^2 H(t) J(t) \\ &= J(t)^T H(t) J(t) - J(t)^T H(t) J(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or $J(0) = I_n$ car $(x, \xi) \mapsto \Phi(0, x, \xi)$ est l'identité. Donc pour tout t dans $[0, 1]$, $J(t)^T J_n J(t) = g(t) = g(0) = J_n$. Donc, pour tout t dans $[0, 1]$, $(x, \xi) \mapsto \Phi(t, x, \xi)$ est un symplectomorphisme de U sur son image.

19. Soit N dans $\mathbf{N}$, (x, ξ) dans U et $h : t \mapsto G \circ \Phi(t, x, \xi)$. h est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ et on déduit de la question 16 par récurrence simple sur j que pour tout j dans $\mathbf{N}$,

$$\forall t \in [0, 1], \quad h^{(j)}(t) = \mathrm{ad}_F^j(G) \circ \Phi(t, x, \xi).$$

En particulier, pour tout j dans $\mathbf{N}$, $h^{(j)}(0) = \mathrm{ad}_F^j(G)(x, \xi)$. Donc en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et 1 :

$$G \circ \tau_F(x, \xi) = h(1) = \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} \mathrm{ad}_F^j(G)(x, \xi) + \frac{1}{N!} \int_0^1 (1-t)^N \mathrm{ad}_F^{N+1}(G) \circ \Phi(t, x, \xi) \mathrm{d}t.$$

Partie V

20. Soit k dans $[\![1;n]\!]$. Pour tout x dans $\mathbf{R}^n$,

$$x_k^{2m_k} = \left(\frac{z_k(x,\xi) + \overline{z_k(x,\xi)}}{\sqrt{2}}\right)^{2m_k} = \frac{1}{2^{m_k}} \sum_{j=0}^{2m_k} \binom{2m_k}{j} z_k(x,\xi)^j \overline{z_k}(x,\xi)^{2m_k - j}.$$

Ainsi,

$$F = \frac{1}{2^{|m|}} \prod_{k=1}^{n} \binom{2m_k}{m_k} z^m \overline{z}^m + G,$$

où les coefficients diagonaux de G sont nuls. Ainsi, F n'a qu'un seul coefficient diagonal : le coefficient devant $z^m \overline{z}^m$: $\dfrac{1}{2^{|m|}} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \binom{2m_k}{m_k}$.

21. $H_1 \circ p = E + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \theta_j p_j$ donc :

$$\{H_1 \circ p, z^k \overline{z}^\ell\} = \sum_{j=1}^{n} \theta_j \{p_j, z^k \overline{z}^\ell\}.$$

Soit j dans $[\![1;n]\!]$.

$$\{p_j, z^k \overline{z}^\ell\} = -i \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial p_j}{\partial z_s} \frac{\partial (z^k \overline{z}^\ell)}{\partial \overline{z_s}} - \frac{\partial p_j}{\partial \overline{z_s}} \frac{\partial (z^k \overline{z}^\ell)}{\partial z_s} \right) = -i \left(\frac{\partial p_j}{\partial z_j} \frac{\partial (z^k \overline{z}^\ell)}{\partial \overline{z_j}} - \frac{\partial p_j}{\partial \overline{z_j}} \frac{\partial (z^k \overline{z}^\ell)}{\partial z_j} \right),$$

car pour tout s dans $[\![1;n]\!]$, si $s \neq j$, alors $\frac{\partial p_j}{\partial z_s} = \frac{\partial p_j}{\partial \overline{z_s}} = 0$. Or $\frac{\partial p_j}{\partial z_j} = z_j$ et

$$\frac{\partial (z^k \overline{z}^\ell)}{\partial \overline{z_j}} = \ell_j z^k \overline{z_j} \ell_j - 1 \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} \overline{z_s}^{\ell_s}.$$

Donc $\frac{\partial p_j}{\partial z_j} \frac{\partial (z^k \overline{z}^\ell)}{\partial \overline{z_j}} = \ell_j z^k \overline{z}^\ell$ et de même, $\frac{\partial p_j}{\partial \overline{z_j}} \frac{\partial (z^k \overline{z}^\ell)}{\partial z_j} = k_i z^k \overline{z}^\ell$. Donc :

$$\{p_j, z^k \overline{z}^\ell\} = -i(\ell_j - k_j) z^k \overline{z}^\ell.$$

Finalement, on a bien

$$\{H_1 \circ p, z^k \overline{z}^\ell\} = i \left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j (k_j - \ell_j) \right) z^k \overline{z}^\ell.$$

22. Soit N un entier naturel non nul et $R_N \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ une fonction polynomiale de degré $2N+2$.
Soit $a = (a_{k,\ell})_{\substack{(k,\ell) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n \\ |k|+|\ell| = 2N+2 \\ k \neq \ell}}$ une famille de nombres complexes et

$$F_N = \sum_{\substack{(k,\ell) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n \\ |k|+|\ell| = 2N+2 \\ k \neq \ell}} a_{k,\ell} z^k \overline{z}^\ell.$$

Soit $b = (b_k)_{\substack{k \in \mathbf{N}^n \\ |k| = N+1}}$ une famille de nombres complexes et H_{N+1} la fonction polynomiale homogène en $N+1$ variables telle que :

$$H_{N+1} \circ p = \sum_{\substack{k \in \mathbf{N}^n \\ |k| = N+1}} b_k z^k \overline{z}^k.$$

Soit enfin $(c_{k,\ell})_{\substack{(k,\ell)\in\mathbf{N}^n\times\mathbf{N}^n\\|k|+|\ell|=2N+2}}$ la famille de nombres complexes telle que :

$$R_N = \sum_{\substack{(k,\ell)\in\mathbf{N}^n\times\mathbf{N}^n\\|k|+|\ell|=2N+2}} c_{k,\ell} z^k \overline{z}^\ell.$$

D'après la question précédente, $\{H_1\circ p\} = H_{N+1}\circ p - R_N$ ssi pour tout (k,ℓ) dans $\mathbf{N}^n\times\mathbf{N}^n$ tel que $|k|+|\ell| = 2N+2$,

— Si $k\neq\ell$,

$$i\left(\sum_{j=1}^n \theta_j(k_j-\ell_j)\right) a_{k,\ell} = -c_{k,\ell}.$$

— Sinon, $k=\ell$ et $b_k = c_{k,k}$.

Puisque $\theta_1,\dots,\theta_n$ sont rationnellement indépendants, ce système d'équations admet bien une unique solution (a,b) donc l'équation $\{H_1\circ p, F_N\} = H_{N+1}\circ p - R_N$ admet un unique couple (F_N, H_{N+1}) comme solution.

Partie VI

23. D'après la question 19, on a au voisinage de $(0,0)$:

$$\begin{aligned}H\circ\phi_1\circ\tau_F(x,\xi) &= H\circ\phi_1(x,\xi) + \{H\circ\phi_1, F\}(x,\xi) + \frac{1}{2}\{\{H\circ\phi_1,F\},F\}(x,\xi)\\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2 \mathrm{ad}_F^3(H\circ\phi_1)\circ\Phi(t,x,\xi)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

— $\{H\circ\phi_1,F\} = \{H_1\circ p, F\} + \{R_1,F\} + \{S_1,F\}$. $\{H_1\circ p,F\}$ est polynomiale homogène de degré 4, $\{R_1,F\}$ de degré 6 et $\{S_1,F\}(x,\xi) = O(\|(x,\xi)\|^8)$.

— De même, $\{\{H\circ\phi_1,F\},F\}(x,\xi) = \{\{H_1\circ p,F\},F\}(x,\xi) + O(\|(x,\xi)\|^8)$.

— Enfin, comme à la question 18.c), le reste intégral est en $O(\|(x,\xi)\|^8)$.

Finalement, on a bien

$$\begin{aligned}H\circ\phi_1\circ\tau_F(x,\xi) &= \left(H_1\circ p + R_1 + S_1 + \{H_1\circ p,F\} + \{R_1,F\} + \frac{1}{2}\{\{H_1\circ p,F\},F\}\right)(x,\xi)\\ &\quad + O(\|(x,\xi)\|^8).\end{aligned}$$

24. D'après le lemme, il existe une fonction polynomiale F_1 homogène en $2n$ variables de degré 4 sans termes diagonaux et une fonction polynomiale H_2 homogène en n variable de degré 2 telles que :

$$\{H_1\circ p, F_1\} = H_2\circ p - R_1.$$

On a alors au voisinage de $(0,0)$:

$$\begin{aligned}H\circ\phi_1\circ\tau_{F_1}(x,\xi) &= \left(H_1\circ p + H_2\circ p + S_1 + \{R_1,F_1\} + \frac{1}{2}\{\{H_1\circ p,F_1\},F_1\}\right)(x,\xi)\\ &\quad + O(\|(x,\xi)\|^8).\end{aligned}$$

$\{R_1,F_1\} + \frac{1}{2}\{\{H_1\circ p,F_1\},F_1\}$ est polynomiale homogène de degré 6, et en notant $[S_1]_6$ les termes de degré 6 du développement de Taylor de S_1, il suffit de poser

$$R_2 = [S_1]_6 + \{R_1,F_1\} + \frac{1}{2}\{\{H_1\circ p,F_1\},F_1\}$$

Reste à choisir $S_2 = H \circ \phi_1 \circ \tau_{F_1} - H_1 \circ p - H_2 \circ p - R_2$. On a bien

$$H \circ \phi_1 \circ \tau_{F_1} = H_1 \circ p + H_2 \circ p + R_2 + S_2,$$

et $S_2(x, \xi) = O(\|(x, \xi)\|^8)$.
En reprenant la question 22, la connaissance de H_2 détermine les coefficients diagonaux de R_1. Puisque W_2 est paire par rapport à chacune de ses variables, donc W_2 est une somme de monômes comme dans la question 20, et les coefficients diagonaux déterminent les coefficients de W_2 d'après cette même question. Remarquons, pour la suite, que la fonction F_1 est alors déterminée par les coefficients extra-diagonaux de R_1 qui sont connus puisque W_2 est entièrement connue.

25. D'après le théorème 1, la question 18 et la question 8, il suffit de démontrer qu'il existe une suite $(H_N)_{N \geqslant 1}$ de fonctions polynomiales homogènes en n variables et une suite $(F_N)_{N \geqslant 1}$ de fonctions polynomiales homogènes en $2n$ variables, où pour tout N dans $\mathbf{N} \backslash \{0\}$, H_N est degré N et F_N de degré $2N + 2$ telles que pour tout entier $N \geqslant 1$, il existe une fonction R_{N+1} polynomiale homogène de degré $2N + 4$ et une fonction $S_{N+1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ telles que :

$$H \circ \phi_1 \circ \tau_{F_1} \circ \cdots \circ \tau_{F_N} = \sum_{k=1}^{N+1} H_k \circ p + R_{N+1} + S_{N+1},$$

et $S_{N+1}(x, \xi) = O(\|(x, \xi)\|^{2N+6})$. Construisons ces suites par récurrence sur N.
— L'initiation, pour $N = 1$, a été faite dans la question précédente.
— Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. Supposons $F_1, \ldots, F_{N-1}$ et $H_1, \ldots, H_N$ construites. On a :

$$H \circ \phi_1 \circ \tau_{F_1} \circ \cdots \circ \tau_{F_{N-1}} = \sum_{k=1}^{N} H_k \circ p + R_N + S_N.$$

Soit (F_N, H_{N+1}) le couple de fonctions donné par le lemme appliqué à la fonction R_N : $\{H_1 \circ p, F_N\} = H_{N+1} \circ p - R_N$. F_N est polynomiale homogène de degré $2N + 2$ (en $2n$ variables). On a alors, d'après la question 19,

$$\begin{aligned}
H \circ \phi_1 \circ \tau_{F_1} \circ \cdots \circ \tau_{F_N} &= \sum_{k=1}^{N} H_k \circ p + R_N + S_N + \{H_1 \circ p, F_N\} \\
&+ \sum_{k=2}^{N} \{H_k \circ p, F_N\} + \{R_N, F_N\} + \{S_N, F_N\} \\
&+ \int_0^1 (1-t) \mathrm{ad}_{F_N}^2 \left(\sum_{k=1}^{N} H_k \circ p + R_N + S_N \right) \circ \Phi(t, x, \xi) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{N+1} H_k \circ p + S_N \\
&+ \sum_{k=2}^{N} \{H_k \circ p, F_N\} + \{R_N, F_N\} + \{S_N, F_N\} \\
&+ \int_0^1 (1-t) \mathrm{ad}_{F_N}^2 \left(\sum_{k=1}^{N} H_k \circ p + R_N + S_N \right) \circ \Phi(t, x, \xi) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or pour tout $k \geqslant 3$, $\{H_k \circ p, F_N\}$ est polynomiale homogène de degré $2k + 2N \geqslant 2N + 6$. $\{R_N, F_N\}$ est polynomiale homogène de degré $2N + 2 + 2N \geqslant 2N + 6$. Les deux autres sont en $O(\|(x, \xi)\|^{2N+6})$. Il suffit donc de poser :

$$R_{N+1} = [S_N]_{2N+4} + \{H_2 \circ p, F_N\},$$

où $[S_N]_{2N+4}$ désigne les termes de degré $2N+4$ du développement de Taylor de S_N. S_{N+1} désignant la somme des autres termes (du développement de Taylor et de la somme), on a bien :

$$H \circ \phi_1 \circ \tau_{F_1} \circ \cdots \circ \tau_{F_N} = \sum_{k=1}^{N+1} H_k \circ p + R_{N+1} + S_{N+1},$$

où R_{N+1} est une fonction polynomiale homogène de degré $2N+4$ en $2n$ variables et $S_{N+1}(x,\xi) = O(\|(x,\xi)\|^{2N+6})$.

— Finalement, on a bien construit les suites $(H_N)_{N\geqslant 1}$ et $(F_N)_{N\geqslant 1}$ par récurrence. Puisque chaque τ_{F_k} est un symplectomorphisme d'après la question 18 et qu'une composée de symplectomorphismes est un symplectomorphisme, $\phi_1 \circ \tau_{F_1} \circ \cdots \circ \tau_{F_N}$ en est un pour tout $N \geqslant 1$. D'après le théorème 1 admis en préambule, il existe une fonction h dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ dont, pour tout $N \geqslant 1$, le développement de Taylor tronqué à l'ordre N est $H_1 + \cdots + H_N$ et on a bien $h(p) = H_1(p) + O(\|p\|^2)$ au voisinage de 0, ce qui achève la preuve.

Chapitre 3

Épreuves orales

Note préliminaire. Les compétences techniques sont au cœur de l'épreuve de leçons de mathématiques et de l'épreuve de modélisation mathématique. La première consiste à construire une leçon sur un thème donné. La candidate ou l candidat doit proposer un plan argumenté précisant l'agencement et l'enchaînement des concepts clefs de la notion abordée, les illustrer par des exemples, en donner des applications et être en mesure de développer au tableau des résultats représentatifs de cette leçon. C'est à la candidate ou au candidat qu'il incombe de sélectionner de tels résultats représentatifs (au moins deux), d'expliquer ces choix, et d'en proposer le développement au jury, dans un temps imparti. Dans la seconde épreuve, la candidate ou le candidat doit mettre en valeur ses connaissances techniques à partir d'un texte d'environ six pages qui lui est fourni. Il s'agit alors de mettre des mathématiques en action dans un contexte applicatif. La candidate ou le candidat présente et discute, de manière structurée, les hypothèses qui conduisent à la description mathématique proposée dans le texte et explique comment les énoncés du programme s'appliquent dans le contexte qui y est décrit. Le propos doit, de plus, être illustré en exploitant l'outil informatique.

Le jury rappelle que s'écarter du programme n'est en aucun cas une exigence pour prétendre à des notes très satisfaisantes ; le jury encourage surtout les préparations et les candidates et candidats à se concentrer sur la maîtrise des bases.

3.1 Épreuve orale de mathématiques (Analyse-Probabilités & Algèbre-Géométrie)

Les thèmes des leçons proposées au concours docteurs sont une sélection de l'ensemble des leçons d'algèbre-géométrie et d'analyse-probabilités du concours standard. On trouvera en annexe la liste des leçons qui seront utilisées en 2024. Le format de cette épreuve de leçons, ainsi que ses attendus, sont en tous points identiques à ceux des épreuves d'Analyse-Probabilités et d'Algèbre-Géométrie du concours standard. Aussi, les candidats sont invités à se reporter aux indications fournies dans le rapport du concours standard pour cette épreuve.

Proposer un plan de leçon et réaliser le développement d'une démonstration précise et détaillée d'un résultat substantiel sélectionné dans le plan proposé, dans un temps limité, sans recours à des notes, constituent des exercices difficiles qui ne s'improvisent pas et auxquels les candidates et candidats doivent impérativement s'entraîner. Il est recommandé de s'y exercer au sein d'une préparation universitaire, où les candidates et candidats docteurs, forts d'une plus grande maturité scientifique, peuvent d'ailleurs jouer un rôle d'émulation très positif sur l'ensemble de la promotion. Le jury attire l'attention des candidates et candidats sur le fait que les tirages peuvent combiner deux leçons orientées analyse et probabilités ou deux leçons orientées algèbre et géométrie ou deux leçons prises dans chacun de ces champs. La candidate ou le candidat choisit laquelle de ces deux leçons elle ou il va exposer au jury. Le jury recommande une lecture minutieuse du rapport du concours standard, qui donne des indications détaillées sur les attendus de ces leçons. On y trouvera notamment une description des notions de base qui devraient constituer le cœur des leçons.

Il est toujours conseillé aux candidates et candidats de chercher à rassurer le jury quant à la maîtrise de ces bases plutôt que de tenter de l'éblouir par un exposé potentiellement inspiré de leurs thèmes de recherche mais débordant largement du programme. Le jury estime que le programme du concours contient un matériel technique suffisamment étoffé pour évaluer les capacités à remplir les missions du professeur agrégé. Les résultats contrastés sont surtout le reflet de niveaux de préparation hétérogènes.

3.2 Épreuve orale de modélisation (options A, B et C)

Pour cette épreuve, le jury renvoie là encore aux recommandations faites dans le rapport du concours standard. Le jury recommande d'éviter les écueils suivants :

— se lancer dans un hors sujet, caractérisé par une tentative de replacer le contenu d'une leçon au détriment de l'analyse du texte ;
— négliger l'illustration informatique, parfois par manque d'entraînement sur les logiciels du concours.

Les candidates et candidats docteurs peuvent tirer profit de leur recul scientifique dans cette épreuve qui nécessite des qualités de synthèse et une capacité à balayer le programme de manière transverse.

Le jury encourage les futurs candidates et candidats à bien se préparer à cette épreuve en s'exerçant sur les textes rendus publics et en se familiarisant avec l'environnement informatique du concours accessible sur le site agreg.org.

3.3 Épreuve orale de mise en perspective didactique d'un dossier recherche

Cette épreuve est spécifique au concours spécial ; sa matière est fournie par un document PDF de 12 pages maximum déposé par la candidate ou le candidat surson espace `Cyclades` dix jours avant le début des épreuves d'admission (en l'espèce la date butoir était donc le 8 juin à 23h59). Ce document consiste en un dossier scientifique présentant le parcours, les travaux de recherche et, le cas échéant, les activités d'enseignement et/ou de valorisation de la recherche. Il n'y a pas de format type puisque ce document a pour vocation de décrire l'expérience *personnelle* du candidat ; il doit surtout s'attacher à décrire le parcours de la candidate ou du candidat, la place qu'occupent les mathématiques dans les principales étapes de celui-ci et comment cette expérience, quelle qu'en soit la nature, sera réinvestie dans la pratique enseignante. La description de l'exploitation d'outils mathématiques au cours d'une expérience professionnelle, comme ingénieur par exemple, est tout à fait bienvenue. Candidates et candidats déjà enseignants peuvent aussi expliquer comment leur expérience de recherche s'exprime dans les classes.

Chaque dossier est confié au préalable à deux membres du jury, avec mission d'en être rapporteurs devant la commission d'interrogation. L'affectation des dossiers prend garde à ne pas confier cette part de l'évaluation à un expert du sujet de thèse de la candidate ou du candidat. L'appréciation du document fourni fait partie des éléments de la grille de notation. Les deux autres membres du jury sont réputés avoir un regard plus « candide » sur la présentation orale de ce dossier. Un débat préparatoire réunissait les membres de la commission avant les épreuves afin d'échanger sur les dossiers et d'organiser une interrogation personnalisée, adaptée aux profils de la candidate ou du candidat.

Les dossiers fournis sont pour la plupart soignés et de qualité, montrant un investissement incontestable des candidats pour mettre en valeur leur parcours. Le jury conseille aux candidates et candidats de penser dans un même élan le document écrit et la présentation orale, en ayant bien présent à l'esprit que le document fournit la base de la présentation et qu'il sera disponible tout au long de celle-ci. Le jury recommande aux candidates et candidats d'inclure dans leur dossier un minimum d'éléments biographiques (notamment en y faisant apparaître clairement leur nom) : des informations sur la mobilité géographique et thématique, le parcours académique et/ou professionnel, les évolutions après thèse... donnent du relief à la discussion. La bibliographie doit être vérifiable par le jury (articles de revues avec comité de lecture, livres vendus dans le commerce etc.). L'impossibilité de trouver de trace des articles ou livres mentionnés dans la bibliographie est sanctionnée.

De manière générale, la rédaction du dossier doit être guidée par une réflexion sur la question « En quoi une expérience dans la recherche peut-elle être un plus pour un enseignant ? ». La dimension de mise en perspective didactique du dossier occupe une place importante de son évaluation : on attend des candidats qu'ils mettent en lumière leurs savoirs, les méthodes et démarches présentes dans leurs travaux et qu'ils expliquent comment elles pourraient être réinvesties dans un enseignement sur l'éventail « lycée - L3 ». Le jury fait observer que la description d'une démarche de recherche et son explication didactique peuvent s'appuyer sur des sujets différents de ceux abordés durant la thèse, si la candidate ou le candidat juge un tel choix plus pertinent (cela peut être le cas pour des candidats ayant une expérience post-thèse assez longue). Davantage que les travaux proprement dits, c'est son expérience de recherche, son parcours qu'il convient de valoriser dans cette épreuve. En particulier, le jury recommande de ne pas s'appuyer sur des résultats obtenus personnellement mais dont on n'a plus la maîtrise. Les concepts utilisés doivent être introduits, et pouvoir être expliqués en détail.

L'objet de cette épreuve est que les candidates et candidats puissent faire preuve d'une véritable plus-value, les distinguant des candidats du concours standard.

Bien que cette demande puisse être légitime au regard des pratiques de la communauté mathématique, les textes régissant le concours interdisent l'exploitation de matériel auxiliaire : les candidates et candidats ne peuvent donc pas appuyer leur présentation sur un support projeté préparé à cette fin. Pour compenser en partie cette difficulté, le jury a décidé de projeter le document de 12 pages fourni par la candidate ou le candidat. en amont du concours. Il recommande donc vivement aux candidates et candidats de prendre en compte cette disposition, afin d'exploiter au mieux cette ressource pour leur exposé. Ce document peut notamment contenir des images ou des figures en illustrant le contenu, qui peuvent même être organisées sous forme d'animation à l'intérieur du fichier PDF. (Il doit bien s'agir d'images ou de figures sous forme d'animation ; cette option ne doit pas permettre d'ajouter du texte et de contourner ainsi la limitation imposée de 12 pages. Si une candidate ou un candidat utilise cette opportunité, il lui est conseillé de l'indiquer dans le document). Il est aussi possible d'insérer des liens hypertextes pour naviguer à l'intérieur du document. Il n'est toutefois pas permis d'exploiter des liens vers des sites web. De même, il n'est pas autorisé de se munir de son manuscrit de thèse, d'articles de recherche, ou, évidemment, de notes personnelles, ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation ; seuls sont autorisés les mêmes documents que pour les autres épreuves, à savoir des livres dont la diffusion commerciale est avérée.

Il était rappelé en début de préparation que l'épreuve a pour objectif « d'apprécier l'aptitude de la candidate ou du candidat à rendre ses travaux accessibles à un public de non-spécialistes ». Typiquement il était recommandé de construire un discours à destination d'un auditoire de niveau au plus M2 de mathématiques ; l'épreuve n'est pas un séminaire réservé à un public de chercheurs sur le sujet de thèse de la candidate ou du candidat. Une grande attention avait été apportée à la composition des commissions pour justement éviter la présence d'experts des thèmes de recherche de la candidate ou du candidat. L'aptitude à se faire comprendre par des non-spécialistes, à la fois dans le dossier écrit et durant la prestation orale, la capacité à s'adapter à des questions de niveaux variés, occupent une part très substantielle de la grille de notation.

L'arrêté du 28 juin 2016 stipule que la candidate ou le candidat doit, lors de cette épreuve, répondre « [...] à une question [...] communiquée par le jury au début de l'heure de préparation ». Elle ou il reçoit donc une question spécifique l'invitant à développer sa réflexion sur la dimension didactique qui pourrait être donnée à son expérience de recherche et à expliquer comment cette expérience pourrait rejaillir dans ses fonctions d'enseignant. Lors de cette session, la question portait sur la proposition d'une ou plusieurs activités en classe autour des thématiques suivantes :

— proposer une illustration ou animation graphique, un dessin ou un objet permettant d'introduire une notion mathématique ;
— proposer une activité instaurant une situation de recherche en classe ;
— proposer une activité introduisant une problématique de modélisation.

Dans les trois cas, il était demandé de préciser à quel niveau était destiné la proposition lycée, ou bien L1 ou L2 non spécialiste.

Le jury souligne qu' il n'y a pas de réponse « type » attendue. Néanmoins, le jury apprécie sa pertinence et attend une description assez précise et concrète de la séance qui pourrait être proposée à des élèves ou des étudiants, avec des exemples et des exercices le cas échéant. Les mathématiques mises en oeuvre et l'identification des enjeux didactiques sont des éléments qu'il convient de bien expliciter. Certaines candidates et certains candidats ont fait cet effort de réfléchir à leur séance de cours ou TD et ont décrit en détail la séquence, en mettant bien en avant une démarche, bâtie sur une question, un calcul, une simulation, et conduisant à des déductions. Si ces propositions ont été plus ou moins pertinentes, avec un niveau plus ou moins bien identifié/adapté, elles ont toujours été valorisées par rapport aux affirmations laconiques « cette notion pourrait être présentée à des étudiants de L1-L2 », « telle partie pourrait être comprise par des étudiants de L1-L2 »... Le dialogue s'est systématiquement attaché à clarifier les modalités de mise en œuvre pratique et concrète de la séquence proposée.

L'épreuve proprement dite comprend deux parties distinctes. Dans un premier temps, durant 30 minutes, la candidate ou le candidat organise librement la présentation de son dossier (durant au moins 20 minutes) et la réponse à la question posée (durant au moins 5 minutes). La suite de l'interrogation est consacrée à un dialogue avec le jury. Ce dialogue, personnalisé suivant le parcoursde la candidate ou du candidat, explore divers aspects du dossier. On peut y distinguer

— des questions en lien direct avec la question posée pour la préparation de l'épreuve. L'objectif est ici de discuter du contenu mathématique de la démarche proposée et de sa mise en perspective didactique.
— des questions sur les mathématiques, les démarches et les méthodes présentées par la candidate ou le candidat lors de son exposé ou présents dans son dossier. Il ne s'agit pas de questions spécialisées d'experts, et encore moins de questions « pièges ». En particulier, pour des docteurs ayant soutenu leur thèse dans d'autres disciplines que les mathématiques, ces questions visent à mettre en relief les aspects mathématiques qui peuvent être en rapport avec leurs travaux de leur recherche. Le but est de tester la capacité à expliquer des points élémentaires des travaux de recherche et de discuter des possibilités de réinvestir les démarches utilisées ou les savoir-faire acquis dans un enseignement de niveau lycée, ou L1-L2.
— le jury peut proposer un exercice niveau lycée (ou L1 mais en restant dans des domaines très classiques) dans un domaine disjoint de celui de la thèse en demandant de le « faire vivre » dans une classe. Ces questions sortent les candidats de leur zone de confort en les faisant réfléchir à des questions en lien avec le programme du secondaire qui ne sont pas reliées à leur domaine de recherche. Il n'est pas attendu de résolution complète des exercices proposés lors de l'oral. Le jury attend une réflexion et une mise en oeuvre d'une possible stratégie, à commencer le plus souvent par une modélisation du problème.
— enfin, le jury pose des questions plus ouvertes dont le thème général peut se résumer à évaluer l'apport d'une expérience dans la recherche pour un enseignant.

Ces questions, dont le niveau est généralement assez élémentaire, arrivent au débotté durant la discussion. La capacité à rebondir pour resituer la question dans le cadre de l'expérience de recherche et/ou d'une réflexion à mener en classe, à reformuler des notions pour les rendre accessibles à un public non averti sont particulièrement évaluées dans cette phase de l'épreuve.

Cette épreuve permet de faire ressortir un véritable signal, discriminant et pertinent quant à l'objectif de recrutement d'enseignants et de valorisation d'une expérience de recherche. Elle joue pleinement son rôle dans la sélection des candidates et candidats. L'épreuve permet à des profils variés, issus d'autres disciplines ou dont la thèse est ancienne, d'exprimer des qualités et une motivation pour les carrières d'enseignants en mathématiques. Pour tirer plein profit de leur expérience et bien mettre en valeur leur parcours, les candidates et candidats doivent préparer cette épreuve spécifique avec soin. Une prestation improvisée, purement descriptive des résultats doctoraux, sans réflexion de mise en perspective et sans anticipation de la discussion, ne conduira qu'à un résultat médiocre.

Chapitre 4

La bibliothèque de l'agrégation

Pendant la préparation à l'épreuve de leçon, les candidates et les candidats ont accès à la bibliothéque du concours. La liste des livres disponibles dans cette bibliothèque peut être consultée dans le rapport de l'agrégation externe. Pendant la préparation à l'épreuve de modélisation, les candidates et les candidats disposent d'une bibliothèque numérique ; la liste des livres disponibles est décrite ci-dessous.

Pour l'épreuve de leçons de mathématiques, les candidates et candidats peuvent utiliser la bibliothèque du concours. La liste des ouvrages disponibles se trouve dans le rapport du concours externe. En 2021, les candidats ont pu utiliser une bibliothéque numérique pendant la préparation de l'épreuve de modélisation. La liste des livres disponibles actualisée en 2023 est décrite ci-dessous.

- Grégoire Allaire : Analyse numerique et optimisation (Éditions de l'École polytechnique)
- Gilles Bailly-Maitre : Arithmétique et cryptologie (Ellipses, 2e édition)
- Philippe Barbe et Michel Ledoux - Probabilité (EDP Sciences)
- Sylvie Benzoni-Gavage : Calcul différentiel et équations différentielles (Dunod, 2e édition)
- Florent Berthelin : Équations différentielles (Cassini)
- Frédéric Bertrand, Myriam Maumy Bertrand : Initiation à la statistique avec R (Dunod)
- Alin Bostan et al. : Algorithmes efficaces en calcul formel (Hal.inria.fr)
- Richard Brent, Paul Zimmermann : Modern Computer Arithmetic (Cambridge University Press)
- Hervé Carrieu : Probabilité (EDP Sciences)
- Alexandre Casamayou et al. : Calcul mathématique avec Sage
- Marie-Line Chabanol, Jean-Jacques Ruch : Probabilités et statistiques (Ellipses)
- Djalil Chafai, Pierre-André Zitt : Probabilités, préparation à l'agrégation interne
- Djalil Chafai, Florant Malrieu : Recueil de modèles aléatoires (HAL Id : hal-01897577, version 3)
- Jean-Pierre Demailly - Analyse numérique et équations différentielles (EDP Sciences, 4e édition)
- Michel Demazure : Cours d'algèbre (Cassini)
- Laurent di Menza : Analyse numérique des équations aux dérivées partielles (Cassini)
- Jérôme Escoffier : Probabilités et statistiques (Ellipses, 3e édition)
- Francis Filbet : Analyse numérique (Dunod, 2e édition)
- Loïc Foissy et Alain Ninet : Algèbre et calcul formel (Ellipses)
- Olivier Garet et Aline Kurtzmann : De l'intégration aux probabilités (Ellipses, 2e édition)
- Thierry Goudon : Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique (ISTE)
- Jean-Baptiste Hiriart-Urruty : Optimisation et analyse convexe (EDP Sciences)
- John Hubbard, Beverly West : équations différentielles et systèmes dynamiques (Cassini)
- Laurent Le Floch et Frédéric Testard : Probabilités 1 (Calvage et Mounet)
- Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 1 (Calvage et Mounet
- Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 2 (Calvage et Mounet)
- Jean-Yves Ouvrard : Probabilités. tome 1 (Cassini, 2e édition)
- Jean-Yves Ouvrard : Probabilités. tome 2 (Cassini, 2e édition)
- Jean-Étienne Rombaldi : Analyse matricielle (EDP Sciences, 2e édition)

— François Rouvière : Petit guide de calcul différentiel (Cassini, 4e édition)
— Victor Shoup : Computational introduction to number theory and algebra (Cambride University Press)
— Damien Vergnaud : Exercices et problèmes de cryptographie (Dunod, 3e édition)

Chapitre 5

Liste des leçons de mathématiques pour le concours spécial 2024

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

148 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

149 Déterminant. Exemples et applications.

150 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

155 Exponentielle de matrices. Applications.

156 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

157 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

191 Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

203 Utilisation de la notion de compacité.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

213 Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

235 Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

244 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 Transformation de Fourier. Applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

266 Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.