MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

EAI MAT 2

SESSION 2024

AGRÉGATION
Concours interne et CAER

Section
MATHÉMATIQUES

Deuxième épreuve

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Il appartient au candidat de vérifier qu'il a reçu un sujet complet et correspondant à l'épreuve à laquelle il se présente.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.
Le fait de rendre une copie blanche est éliminatoire.

A

Tournez la page S.V.P.

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

EAI MAT 2

SESSION 2024

AGRÉGATION
Concours interne et CAER

Section
MATHÉMATIQUES

RECTIFICATIF

Durée : 6 heures

Rectificatif 1 : la question 14 page 2/8 est remplacée par

14. Justifier que la fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$. En déduire que pour tous réels strictement positifs *x* et *y*, on a

$$\ln\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right) \geq \frac{\ln(x)}{p}+\frac{\ln(y)}{q}.$$

Rectificatif 2 : la définition 3 page 5/8 est remplacée par

Définition 3. Soit *I* un intervalle de IR et $f{:}I \to \mathrm{IR}^{+*}$ une fonction. On dit que *f* est log-convexe sur *I* si pour t dans l'intervalle [0,1], pour tous nombres réels *x, y* dans *I*,

$$f(tx+(1-t)y) \leq f(x)^t f(y)^{1-t}.$$

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie. Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

AGRÉGATION INTERNE
MATHÉMATIQUES

► Concours interne de l'Agrégation de l'enseignement public :

Concours	Section/option	Épreuve	Matière
EAI	1300A	102	0530

► Concours interne du CAER / Agrégation de l'enseignement privé :

Concours	Section/option	Épreuve	Matière
EAH	1300A	102	0530

IMPRIMERIE NATIONALE – 24 0351 – D'après documents fournis

Notations et rappels

Dans tout le sujet, $\mathbb{R}$ désignera le corps des nombres réels, $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. L'ensemble des nombres réels positifs sera noté $\mathbb{R}^+$ et l'ensemble des nombres réels strictement positifs sera noté $\mathbb{R}^{+*}$. L'ensemble des entiers naturels non nuls sera noté $\mathbb{N}^*$. Pour n un entier naturel non nul, $[\![1, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels i tels que $1 \leqslant i \leqslant n$.

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$. Pour f une fonction définie sur I et à valeurs réelles et si $k \in \mathbb{N}^*$, on dira que f est de classe C^k sur I si f est k fois dérivable sur I et si sa dérivée k-ième est continue sur I. On dira que f est de classe C^∞ sur I si f est indéfiniment dérivable sur I.

Le sujet comporte deux exercices indépendants, suivi d'un problème comportant quatre résultats préliminaires dont les résultats seront réutilisés dans les cinq parties qui suivent.

Exercice 1

On souhaite résoudre l'équation fonctionnelle suivante, où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x}{2} + \int_0^x (x-t) f(-t) \mathrm{d}t. \tag{1}$$

1. Montrer que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles se décompose de manière unique en somme d'une fonction paire $P(f)$ et d'une fonction impaire $I(f)$.
2. Soit f une fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Montrer que $P(f)$ et $I(f)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exprimer $P(f)'$ et $I(f)'$ à l'aide de f'.
3. Soit une f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et qui vérifie l'équation (1).
   (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de f'.
   (b) Montrer que f' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de f''.
   (c) Justifier que $P(f)$ et $I(f)$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et déterminer des équations différentielles vérifiées par $P(f)$ et $I(f)$.
4. Déterminer les solutions de l'équation fonctionnelle (1).

Exercice 2

Pour tout entier n strictement positif, on définit la fonction g_n sur $\mathbb{R}^+$ par

$$g_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(-x) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \end{array} \right.$$

5. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, l'équation $g_n(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution positive que l'on notera a_n.
6. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.
7. On considère une suite $(X_i)_{i \geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toute une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.
   (b) Quelle est la loi de S_n ? (Justifier brièvement votre réponse).

B

Tournez la page S.V.P.

(c) Montrer que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(S_n \leqslant n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ si } \lambda = 1, \\ 0 \text{ si } \lambda > 1, \\ 1 \text{ si } \lambda < 1. \end{cases}$$

Indication : pour le premier cas, on pourra utiliser le théorème central-limite. Pour les deux autres cas, on pourra appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev à la variable aléatoire $M_n = \dfrac{S_n}{n}$.

8. (a) Montrer pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{P}(S_n \leqslant n) = g_n(n\lambda)$.
   (b) Jusitifer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} g_n(n) = \dfrac{1}{2}$.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{a_n}{n} = 1$.

Résultat préliminaire 1 : la fonction Γ

Définition 1. *On définit pour $x \in \mathbb{R}$,*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) \mathrm{d}t$$

lorsque cette intégrale est convergente.

9. Déterminer l'ensemble de définition de Γ.
10. Montrer que cette fonction est de classe C^1 sur son ensemble de définition et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale.
11. Soit x un réel strictement positif. Exprimer $\Gamma(x+1)$ à l'aide de $\Gamma(x)$.
12. Établir que pour tout entier naturel n non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
13. Montrer que l'on peut prolonger la fonction Γ et définir $\Gamma(z)$ pour tout nombre complexe z dont la partie réelle est strictement positive.

Résultat préliminaire 2 : l'inégalité de Hölder-Minkowski

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On considère deux fonctions continues positives f et g telles que f^p et g^q soient intégrables sur $[0, +\infty[$. Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité de Hölder-Minkowski :

$$\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

14. Justifier que la fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$. En déduire que pour tous réels strictement positifs x et y, on a
$$\ln\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \geqslant \frac{\ln(x)}{p} + \frac{\ln(x)}{q}.$$
15. Montrer que pour tous réels positifs ou nuls u et v, on a
$$uv \leqslant \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q.$$
16. Montrer l'inégalité de Hölder-Minkowski lorsque $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^p(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} g^q(x)\mathrm{d}x = 1$.
17. Montrer l'inégalité de Hölder-Minkowski dans le cas général.

Résultat préliminaire 3 : sommes harmoniques

On note, pour tout entier naturel n non nul,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Le but de cette partie est de montrer que

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$, où γ est une constante réelle appelée constante d'Euler.

18. Montrer que pour tout entier naturel strictement positif n,
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n}.$$
19. En déduire que la suite $(H_n - \ln n)_{n\geqslant 1}$ admet une limite finie qu'on notera γ.
20. Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$. *Indication* : on pourra travailler par comparaison série-intégrale.
21. On pose $s_n = H_n - \ln(n) - \gamma$. Donner un équivalent de $s_n - s_{n-1}$ quand n tend vers $+\infty$.
22. En déduire un équivalent de s_n lorsque n tend vers $+\infty$ et conclure.

Résultat préliminaire 4 : le problème de Bâle

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Pour cela, on introduit la fonction réelle 2π-périodique f, définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in [-\pi, \pi[$. Pour n entier naturel, on notera $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier, définis par

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t.$$

23. Tracer le graphe de f.
24. Déterminer les coefficients de Fourier de f puis rappeler l'expression de la série de Fourier Sf de f.
25. Rappeler la formule de Parseval.
26. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Tournez la page S.V.P.

Première partie : problème du collectionneur de vignettes

On s'intéresse au problème suivant : un enfant achète des vignettes pour compléter un album contenant n vignettes, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2*. Lorsqu'on achète une vignette, celle-ci est cachée et on ne peut la choisir. On s'intéresse au nombre d'achats nécessaires pour terminer l'album. On suppose que la répartition des n vignettes est uniforme au cours de tous les achats, si bien qu'on assimile l'expérience au tirage avec remise d'un jeton numéroté entre* 1 *et n dans une urne contenant les n jetons.*

On note T_n *la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois au moins chacun des n jetons. À chaque tirage, on appelle succès le fait d'avoir tiré un numéro non encore obtenu.*

Pour $i \in [\![1, n]\!]$*, on note* $X_{n,i}$ *la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois i numéros différents, en comptant à partir du succès précédent. Par convention,* $X_{n,1} = 1$ *et on a ainsi* $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_{n,i}$*.*

Par exemple, si $n = 4$ *et qu'on obtient les tirages* $1, 3, 3, 2, 1, 2, 1, 4$*, alors*

$X_{4,1}$ *prend la valeur* 1, $X_{4,2}$ *prend la valeur* 1,
$X_{4,3}$ *prend la valeur* 2, $X_{4,4}$ *prend la valeur* 4,
T_4 *prend la valeur* 8.

27. (a) Écrire en Python ou en langage naturel une fonction `collectionneur(n)` qui simule la variable aléatoire T_n. On pourra utiliser la fonction `randint(1,n)` qui simule le tirage aléatoire d'un entier de $[\![1, n]\!]$ de façon uniforme.
    (b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Déterminer la loi de $X_{n,i}$ et donner, sous réserve d'existence, l'espérance $\mathbb{E}(X_{n,i})$ et la variance $\mathbb{V}(X_{n,i})$ de $X_{n,i}$.
    (c) Justifier que les variables aléatoires $(X_{n,i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes.
    (d) En déduire une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}(T_n)$ faisant intervenir les sommes

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

    (e) Donner des équivalents simples de $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}(T_n)$.

Définition 2. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$*. On appelle série génératrice de X la série* $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(X = k)t^k$ *et, pour toute valeur de* $t \in \mathbb{R}$ *telle que cette série converge, la fonction génératrice de X est donnée par*

$$Q_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k.$$

28. Soit Y suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer sa fonction génératrice Q_Y. On n'oubliera pas de préciser son ensemble de définition.
29. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$.
    (a) Justifier que Q_X est bien définie sur $[-1, 1]$ et préciser $Q_X(1)$.
    (b) On suppose que X admet une espérance. Montrer qu'alors Q_X est dérivable sur $[-1, 1]$ puis exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de Q'_X.
    (c) Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X et Y ont même loi si et seulement si elles admettent la même fonction génératrice.

(d) Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes. Exprimer Q_{X+Y} en fonction de Q_X et Q_Y.

30. (a) On note $Q_n = Q_{T_n}$ la série génératrice de T_n. Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$Q_n(t) = \frac{n!}{n^n} \frac{t^n}{\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{kt}{n}\right)}.$$

(b) Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-1-k} \frac{t}{1 - \frac{kt}{n}}.$$

Indication : on pourra décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{Q_n(t)}{t}$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel j non nul,

$$\mathbb{P}(T_n = j) = \frac{1}{n^{j-1}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-1-k} k^{j-1} \right).$$

Deuxième partie : log-convexité de la fonction Γ

On rappelle que la fonction Γ est définie dans le premier résultat préliminaire, définition 1.

Définition 3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction. On dit que f est log-convexe sur I si pour $t \in [0, 1]$, pour tous nombres réels x, y dans I,*

$$f(tx + (1 - x)t) \leqslant f(x)^t f(y)^{1-t}.$$

31. Montrer que la fonction Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$. *Indication :* on pourra utiliser l'inégalité de Hölder-Minkowski pour p et q bien choisis.

Le but de la question 32 est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4. ***Théorème de Bohr-Mollerup***. *Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction vérifiant :*

- $f(1) = 1$.
- $\forall x > 0,\ f(x + 1) = x f(x)$;
- *f est log-convexe.*

Alors $f = \Gamma$.

32. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction vérifiant les trois hypothèses du théorème de Bohr-Mollerup.

(a) Soit n un entier naturel. Calculer $f(n + 1)$.

(b) Pour tout réel strictement positif x, exprimer $f(n + x)$ en fonction de $f(x)$.

(c) Soient $x \in]0, 1]$ et n un entier naturel non nul. Montrer que

$$f(n + x) \leqslant n^x (n - 1)!$$

et que

$$n! \leqslant (n + x)^{1-x} f(n + x).$$

Indication : on pourra utiliser les égalités

$$n + x = x(n + 1) + (1 - x)n, \qquad n + 1 = x(n + x) + (1 - x)(n + 1 + x).$$

(d) On pose pour $x \in]0,1]$ et pour n entier naturel non nul,

$$u_n(x) = \frac{(n+x)^{x-1} n!}{\prod\limits_{0 \leqslant k < n} (x+k)}, \qquad v_n(x) = \frac{n^x (n-1)!}{\prod\limits_{0 \leqslant k < n} (x+k)}.$$

Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, $u_n(x) \leqslant f(x) \leqslant v_n(x)$ et $u_n(x) \leqslant \Gamma(x) \leqslant v_n(x)$.

(e) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, les suites $(u_n(x))_{n \geqslant 1}$ et $(v_n(x))_{n \geqslant 1}$ sont équivalentes.

(f) En déduire que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n(x) = f(x).$$

(g) En déduire que pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = \Gamma(x)$.

(h) Montrer finalement que $f = \Gamma$.

33. Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)}.$$

Cette formule est due à Euler. On admettra par la suite qu'elle reste valable lorsque x est un nombre complexe dont la partie réelle est strictement positif.

Troisième partie : fonction caractéristique

Définition 5. *Pour X une variable aléatoire réelle, on appelle fonction caractéristique de X la fonction Φ_X définie par*

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}(\exp(\mathrm{i}tX)),$$

pour tout réel t où cette espérance existe.

34. Déterminer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle Y suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On n'oubliera pas de préciser son ensemble de définition.

35. On suppose que X est à une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) Montrer que Φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

(b) On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$. Montrer que Φ_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, puis exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de Φ_X et sa dérivée.

(c) Plus généralement, on suppose maintenant que $\mathbb{E}(X^k)$ existe pour tout entier naturel k. Montrer que Φ_X est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, puis exprimer $\mathbb{E}(X^k)$ en fonction de Φ_X et de ses dérivées.

(d) Lorsque X possède une espérance, donner une relation simple entre la fonction génératrice Q_X de X (voir la définition 2) et Φ_X.

36. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}$. Déterminer Φ_{X+Y} en fonction de Φ_X et de Φ_Y.

Quatrième partie : la loi de Gumbel

Définition 6. *On définit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(-x) \cdot \exp(-\exp(-x)) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}. \end{array} \right.$$

37. Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Définition 7. *On dit que X suit une loi de Gumbel si X admet f comme densité.*

Jusqu'à la fin de cette partie, X désigne une variable aléatoire réelle suivant la loi de Gumbel.

38. Déterminer la fonction de répartition de X.

39. Montrer que X admet une espérance et une variance, sans chercher à les calculer.

40. (a) Montrer que $\mathbb{E}(X) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

    (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t$.

    (c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - H_{n+1}\right).$$

    (d) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

41. Montrer que $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

Avec des méthodes semblables à celles de la question 40. (c) on peut montrer (on ne demande pas de le faire !) que

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n (\ln(t))^2\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\left((\ln(n))^2 - 2\ln(n)H_{n+1} + 2\sum_{i=1}^{n+1} \frac{H_i}{i}\right).$$

42. (a) Établir que pour tout entier naturel n non nul,

$$2\sum_{i=1}^{n} \frac{H_i}{i} = H_n^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}.$$

    (b) En déduire la valeur de $\mathbb{V}(X)$.

43. *On rappelle que Φ_X est la fonction caractéristique associée à X introduite à la partie précédente, définition 5.* Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_X(t) = \Gamma(1 - \mathrm{i}t).$$

 Tournez la page S.V.P.

Cinquième partie : convergence en loi

On rappelle que pour tout entier naturel n non nul, T_n désigne la variable aléatoire introduite dans la première partie, égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois au moins chacun des n jetons. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$Z_n = \frac{T_n - n\ln(n)}{n}.$$

44. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer Φ_{Z_n} en fonction de Φ_{T_n}.
45. Montrer que pour tout $t \in]-\infty, 1[$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \Phi_{Z_n}(t) = \Gamma(1 - \mathrm{i}t).$$

On admet que ce résultat assure la convergence en loi de Z_n vers une loi de Gumbel.

46. Montrer pour tout réel ϵ strictement positif,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} P(T_n - n\ln(n) \leqslant \epsilon n) = \exp(-\exp(-\epsilon)).$$