

SESSION 2022

AGREGATION CONCOURS EXTERNE

Section : PHYSIQUE-CHIMIE
Option : PHYSIQUE

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1500A	101	0385

Quelques propriétés des vitrages d'habitation

Ce sujet s'intéresse principalement aux propriétés mécaniques, optiques, et acoustiques du verre utilisé dans les vitrages d'habitation. Ces propriétés, dont certaines peuvent être contrôlées, sont des éléments essentiels du confort domestique qui mettent en jeu une physique riche et variée.

Les trois parties du problème sont indépendantes.

Le candidat notera que certaines questions, repérées par une barre en marge, sont moins guidées et exigent des réponses nécessitant une prise d'initiatives : les réponses correctement argumentées, même non abouties seront valorisées.

La clarté de la rédaction et la présentation seront prises en compte dans l'évaluation.

Notations :

- En un point M de l'espace, dans un repère d'origine O , on note $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position.
- On note j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.
- Pour une grandeur à valeurs réelles dépendant du temps de façon harmonique, on note en la soulignant la grandeur complexe associée.

On aura par exemple $f(t) = \mathcal{Re} [\underline{f}(t)]$, avec $\underline{f}(t) = f_0 e^{j\omega t}$ pour la grandeur $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$.

On pourra noter que les représentations complexes de fonctions sinusoïdales sont les seules qui répondent à cette convention. Les autres grandeurs sont associées à des lettres non soulignées. Par exemple, un indice de réfraction complexe sera représenté par la lettre n , non soulignée, même si sa partie imaginaire est non nulle.

Formulaire :

- Opérateurs vectoriels :
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \overrightarrow{\Delta}(\vec{A}) \\ \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}U) &= \Delta U \end{aligned}$$
- On rappelle le développement limité suivant, à l'ordre 2 en ε : $(1 + \varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\varepsilon^2$.

Grandeurs et valeurs numériques :

Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Charge de l'électron : $q_e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Constante des gaz parfaits :

L'air est considéré comme un gaz parfait de coefficient $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$ et de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Valeurs numériques de grandeurs liées au verre :

Grandeur physique	Notation	Valeur numérique
Masse volumique	ρ_v	$2,5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Module d'Young	E	70 GPa
Célérité des ondes sonores	c_v	$5,5 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

I. Le verre, milieu de propagation des ondes électromagnétiques

- 1) Rappeler les équations de Maxwell vérifiées par les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} dans le vide, en l'absence de charges et de courants.

Obtenir l'équation de D'Alembert de propagation des champs électriques \vec{E} et magnétique \vec{B} dans le vide (en ne développant les calculs que pour un de ces deux champs), et donner l'expression de c , célérité de la lumière dans le vide.

Dans le cas d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique de pulsation ω , se propageant dans le vide, de vecteur d'onde \vec{k} , d'amplitude complexe \vec{E}_0 , écrire le champ électrique $\vec{E}(M, t)$. Obtenir la relation de dispersion.

- 2) On admet que le verre est un **diélectrique linéaire homogène isotrope**.

Définir chacun de ces 4 mots écrits en caractères gras. Expliciter alors le lien entre champ électrique \vec{E} et polarisation volumique \vec{P} .

Dans un milieu dense tel que le verre, on considère en bonne approximation que la polarisation du milieu est essentiellement électronique. Pour étudier l'interaction du champ électromagnétique avec les charges liées du milieu, on utilise ci-dessous le modèle classique élémentaire de l'électron élastiquement lié, proposé par A. Lorentz dans lequel :

- le mouvement des électrons est non relativiste ;
- les électrons d'un atome centré sur l'origine de l'espace sont soumis de la part du reste de l'atome à une force de rappel élastique $\vec{f} = -K \vec{r}$, où K est une constante ;
- les phénomènes dissipatifs d'énergie sont pris en compte sous la forme d'une force $\vec{f}' = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$ où τ est un temps de relaxation et \vec{v} le vecteur vitesse

On s'intéresse au domaine spectral allant de l'ultra-violet (UV) au proche infrarouge (IR).

- 3) Montrer que dans la gamme de longueurs d'onde considérée, le champ électrique de l'onde est pratiquement uniforme à l'échelle des atomes constituant le verre.

Comparer en ordre de grandeur la composante magnétique de la force de Lorentz exercée par une onde électromagnétique sur un électron à la composante électrique, et conclure.

- 4) Écrire l'équation du mouvement d'un électron sous la forme

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{q_e}{m_e} \vec{E},$$

où \vec{E} est le champ électrique de l'onde auquel l'atome est exposé. Donner l'expression et la signification concrète des paramètres ω_0 et Q .

Le milieu étudié est globalement neutre, contenant N charges liées par unité de volume. Dans ce modèle simple, on assimile le champ électrique local au champ de l'onde électromagnétique dans le verre.

- 5) Exprimer le moment dipolaire \vec{p} associé à une charge induit par le champ électrique.

Pour une onde électromagnétique monochromatique de pulsation ω , déduire qu'en notation complexe, le vecteur polarisation volumique \vec{P} peut s'écrire sous la forme $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$, avec :

$$\chi_e = \frac{\chi_0}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Nommer χ_e et exprimer χ_0 en fonction de ω_0 et de la « pulsation plasma » $\omega_p = \sqrt{\frac{Nq_e^2}{m\varepsilon_0}}$.

On rappelle que dans un diélectrique il apparaît des charges volumiques de polarisation $\rho_{pol} = -\operatorname{div}(\vec{P})$ et des courants volumiques de polarisation $\vec{J}_{pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$.

- 6) Réécrire les équations de Maxwell dans ce diélectrique, en régime sinusoïdal forcé. Montrer qu'elles prennent la forme de la question 1) en remplaçant ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, et définir ϵ_r , grandeur complexe, en fonction de χ_e . Donner le nom et l'unité de cette grandeur.

On note $\vec{k} = k(\omega)\vec{u}_z$ le vecteur d'onde (complexe) d'une onde plane progressive de pulsation ω se propageant dans la direction \vec{u}_z .

- 7) Déterminer la relation de dispersion en exprimant $k^2(\omega)$ en fonction de ϵ_r , ω et c .
- 8) Définir l'indice optique complexe du verre, noté n .
On peut écrire, en général, $n = n_1 - jn_2$ avec n_1 et n_2 réels positifs dépendant de ω . À partir d'une discussion sur les phénomènes de propagation et d'atténuation des ondes électromagnétiques, précisez le sens concret que l'on peut donner aux paramètres n_1 et n_2 .

L'étude spectrale du verre montre que la pulsation caractéristique ω_0 des verres utilisés en vitrage d'habitation, où ω_0 est la pulsation définie question 4), correspond à une longueur d'onde notée λ_0 d'environ 100 nm, et que la valeur de Q est très supérieure à 1.

- 9) À l'aide des courbes de $n_1(\lambda)$ et $n_2(\lambda)$ issues du modèle de l'électron élastiquement lié (voir figure 1), expliquer la transparence du verre dans le visible et le proche infrarouge, ainsi que l'absorption partielle dans le domaine ultra-violet. Justifier que dans le domaine visible, on peut écrire approximativement $n \cong n_1$.

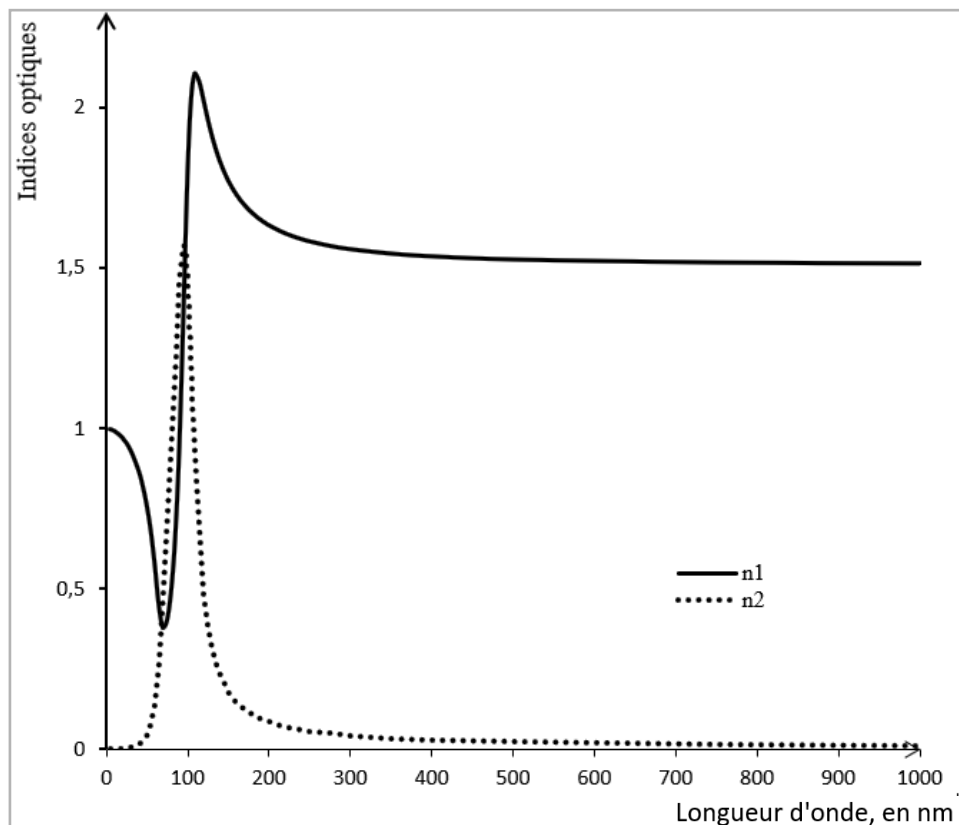


FIGURE 1 - Indices optiques d'un vitrage d'habitation dans le modèle de l'électron élastiquement lié. Courbes tracées pour $Q=4$ (par souci de commodité de lecture)

- 10) Retrouver, dans le cadre du modèle simple développé ci-dessus et dans le cas d'une onde dans le domaine visible, la loi de Cauchy donnant l'indice de réfraction d'un verre en fonction de la longueur d'onde λ :

$$n = n_0 + \frac{B}{\lambda^2}.$$

Exprimer les constantes n_0 et B en fonction de χ_0 et λ_0 .

On souhaite vérifier expérimentalement la loi de Cauchy, en étudiant la dispersion de la lumière par un prisme de verre droit. On utilise pour cela un goniomètre, dont la photographie est donnée en figure 2 ci-dessous.

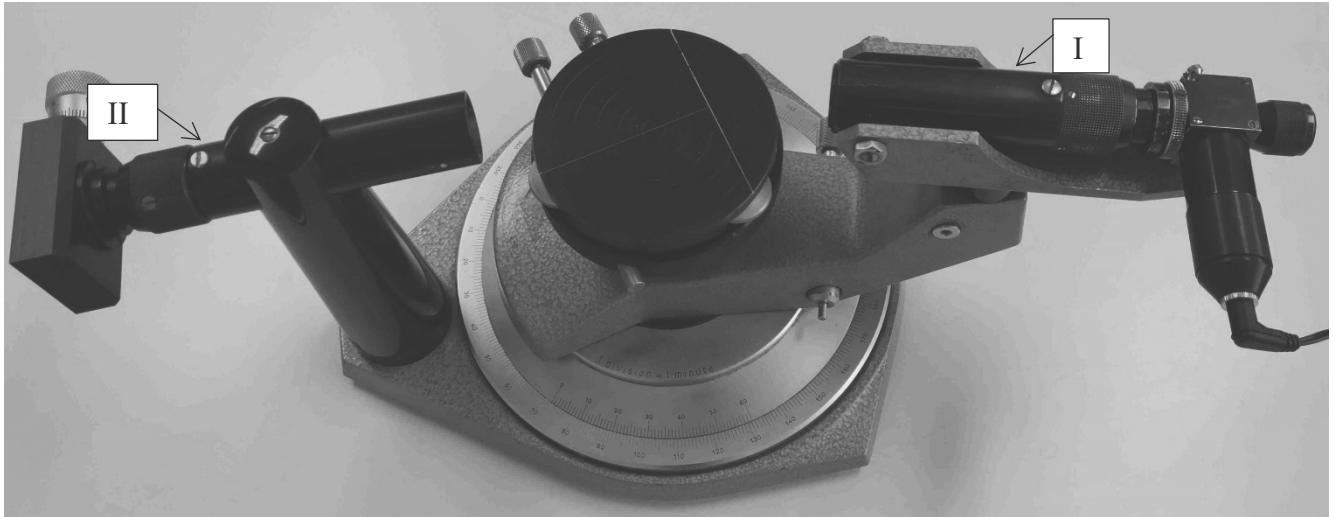


FIGURE 2 – Photographie du goniomètre utilisé

- 11) Donner le nom et décrire succinctement le rôle et le principe de réglage des éléments identifiés par les repères I et II dans la photographie de la figure 2.

Le goniomètre est utilisé avec une lampe à vapeur de mercure, qui émet 6 raies spectrales visibles, dont on donne les longueurs d'onde dans le tableau 1.

λ en μm	0,4047	0,4078	0,4358	0,5461	0,5770	0,5791
----------------------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

TABLEAU 1 – Longueurs d'onde des 6 raies visibles d'une lampe à vapeur de mercure

- 12) Sur la platine du goniomètre, on dispose le prisme, d'angle au sommet A opposé à sa base. Grâce au schéma d'un rayon lumineux incident avec l'angle i sur une face d'entrée, traversant le prisme et émergent de la face de sortie, définir l'angle D de déviation.
Préciser, sans le résoudre mais en le justifiant et en précisant les notations utilisées, un système d'équations qui permet de déterminer D si l'angle d'incidence i et l'indice du verre sont connus (l'indice de réfraction de l'air est pris égal à 1).

On peut montrer que l'angle de déviation D admet pour chaque longueur d'onde λ un minimum de déviation : lorsque l'angle d'incidence i varie à longueur d'onde λ fixée, on note ce minimum $D_m(\lambda)$.

- 13) Sans calcul, expliquer succinctement pourquoi il est préférable de mesurer l'angle de déviation minimum plutôt que l'angle de déviation obtenu pour une incidence quelconque.

On estime que le minimum de déviation D_m est déterminé avec une incertitude de 6 minutes d'angle : $\Delta D_m = 6'$. Pour le prisme étudié, on mesure $A = 60^{\circ}01'$, avec une incertitude négligeable. Par ailleurs, on peut montrer que l'indice optique du verre n est relié au minimum de déviation par :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

Un calcul de propagation d'erreur, non demandé ici, permet de déduire l'incertitude sur n , Δn , par :

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{2} \cotan\left(\frac{A+D_m}{2}\right) \Delta D_m$$

14) Faire l'application numérique de $\frac{\Delta n}{n}$ pour une valeur de $D_m = 72,0^{\circ}$, et indiquer le nombre de chiffres significatifs adéquat pour n .

Des résultats expérimentaux avec une lampe à vapeur de mercure sont les suivants :

λ en μm	0,4047	0,4078	0,4358	0,5461	0,5770	0,5791
n	1,865	1,862	1,847	1,812	1,807	1,807

TABLEAU 2 – Résultats expérimentaux

Un code Python d'exploitation des données expérimentales du tableau 2 est fourni en annexe, à la fin du sujet. On rappelle que :

- la fonction 'liste.append(x)' ajoute x à la fin de la liste « liste ».
- la fonction 'np.random.uniform(x,y)' tire aléatoirement avec une loi de distribution uniforme une valeur dans l'intervalle $[x,y]$

Les lignes 34 à 38 de ce code permettent d'afficher les écarts entre les valeurs expérimentales de $n(1/\lambda^2)$ et les valeurs modélisées par la droite de tendance dont l'allure est donnée figure 3.

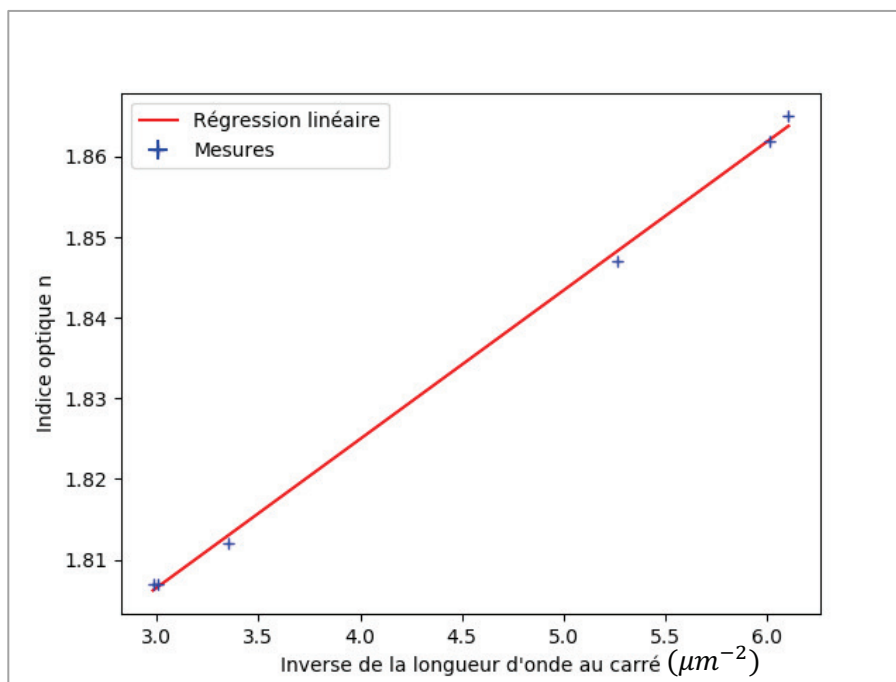


FIGURE 3 – Résultat du calcul numérique correspondant aux lignes 17 à 24 du code Python donné en annexe à la fin du sujet

15) Préciser l'action de la ligne 17 du code en indiquant la signification et la nature des variables `res`, `InvI2` et `N`.

On donne, ci-dessous, les résultats affichés dans la console Python suite à l'exécution des lignes 31 et 38 du code Python.

```
Ecarts:
[-0.0011828053577820352, 0.00011063148890255725, 0.0013092086927795066, 0.00102160882701163
-0.0004286787866516484, -0.0008299648642628998]
Incertitudes:
[0.0006304563822433166, 0.0006370645920952658, 0.0006695575720773862, 0.00073875796907560
0.0007479265210497462, 0.0007482074870668704]
```

- 16) Discuter, en argumentant, la validité du modèle affine de la figure 3.
- 17) Décrire le principe de la méthode, dite de Monte Carlo, mise en œuvre dans le bloc de lignes 40 à 50.
- 18) Dédire des histogrammes, donnés figures 4 et 5, les valeurs que l'expérience permet d'obtenir pour les paramètres n_0 et B , la loi de Cauchy étant supposée valable. Préciser leur unité.
Estimer l'incertitude sur ces deux grandeurs, avec une courte explication.
Préciser la ligne du code qui définit le nombre d'itérations, ainsi que la valeur choisie ici pour ce nombre.
Décrire succinctement l'effet qu'aurait une multiplication par dix de ce nombre d'itérations sur les histogrammes.

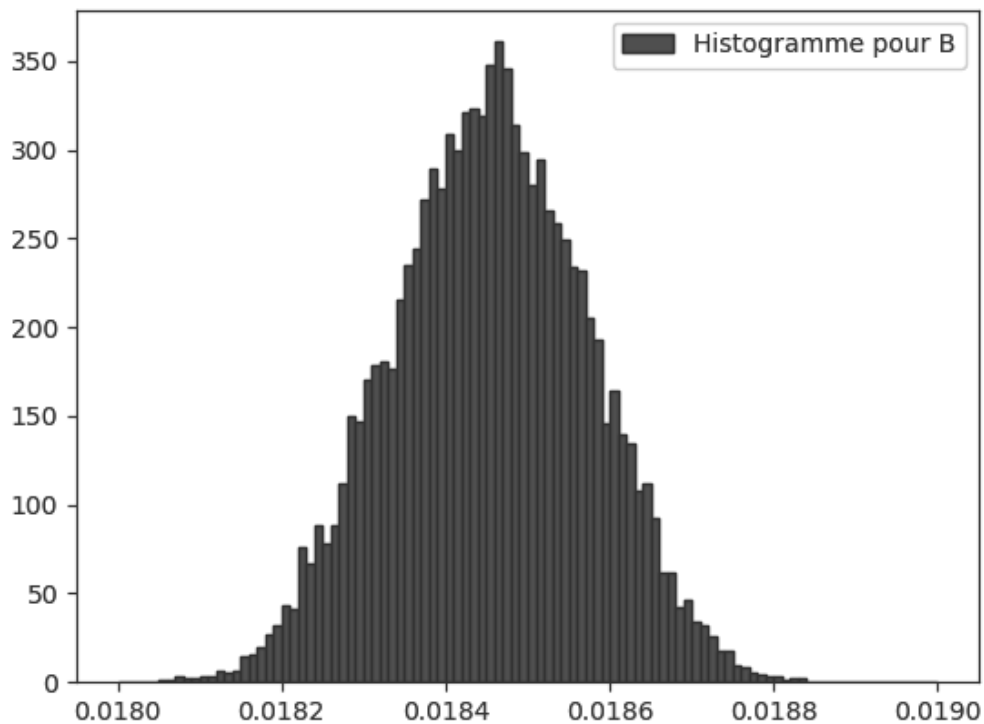


FIGURE 4 – Histogramme affiché après exécution de la ligne 55 du code Python donné en annexe à la fin du sujet

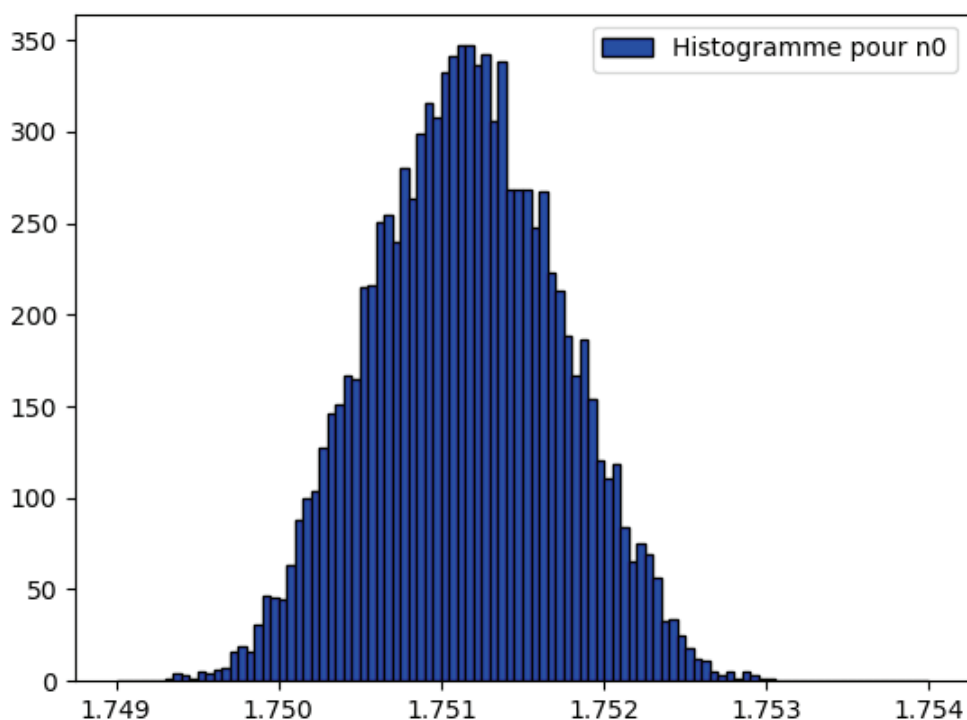


FIGURE 5 – Histogramme affiché après exécution de la ligne 58 du code Python donné en annexe à la fin du sujet

Une innovation récente permet de modifier de façon contrôlée les propriétés optiques d'un vitrage. Il s'agit de la vitre électrochrome : plaque vitrée qui, comme on le voit sur la figure 6, sous l'effet d'un champ électrique appliqué, peut passer d'un état clair (vitre incolore) à un état foncé (vitre plus ou moins bleutée). Le changement de teinte est dû à la présence, au sein du vitrage, d'une couche de trioxyde de tungstène, appelé matériau électrochrome car son absorption optique dans une couleur (complémentaire au bleu) dépend de son degré d'oxydation, via la présence ou non de cations en son sein.



FIGURE 6 - Séquence de coloration d'une fenêtre électrochrome.
Source : "Elektrochrome Verbundgläser Gesimat EC", *Gesimat*

La figure 7 présente le dispositif à cinq couches minces inséré usuellement dans un vitrage électrochrome : sous l'influence d'un champ électrique produit par la tension appliquée entre deux électrodes conductrices (notées EC1 et EC2), des ions se déplacent à travers la couche électrolyte solide. Cette couche électrolyte

est elle-même placée entre deux couches notées OCT (comme Oxydes Conducteurs Transparents), dont l'une est constituée d'un matériau électrochrome, qui, selon la présence ou non de cations, prend une coloration différente.

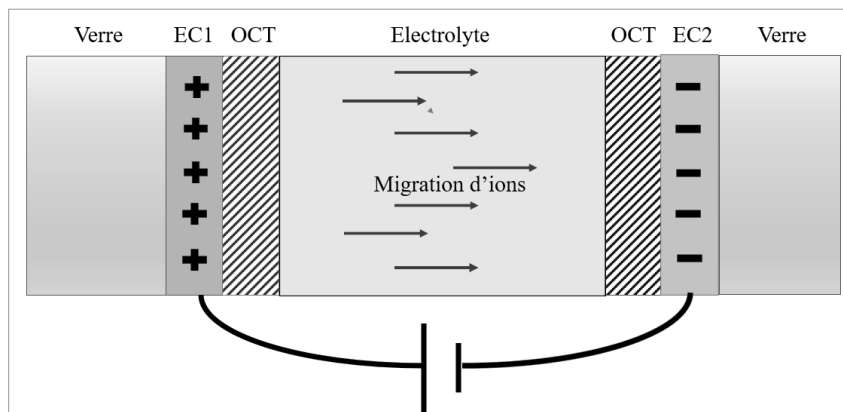


FIGURE 7 - Représentation schématique d'un dispositif électrochrome à cinq couches

Les couches OCT doivent posséder une excellente conductivité électronique de type métallique. Afin de mesurer la conductivité électrique γ_e d'une telle couche mince, d'épaisseur e_0 , on procède selon la méthode des 4 points, représentée figure 8(a) :

- On aligne quatre points, équidistants d'une distance a petite par rapport aux dimensions transversales de l'échantillon.
- On envoie un courant électrique d'intensité I connue entre la pointe 1 et la pointe 4 et on mesure la différence de potentiel U entre les points 2 et 3.

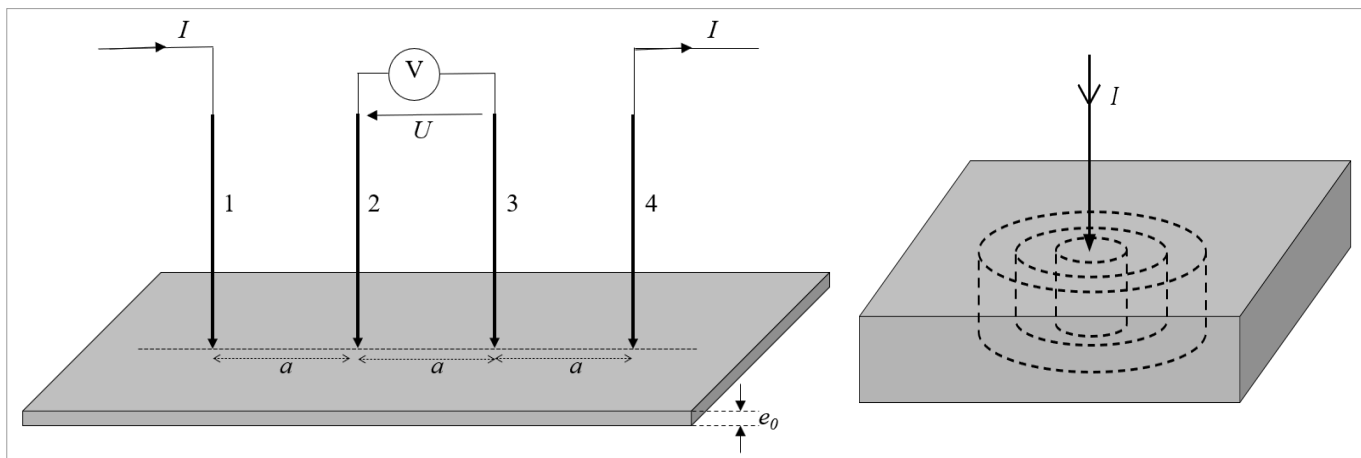


FIGURE 8 – (a) Principe de la méthode des 4 points. (b) Forme cylindrique des équipotentielles autour de la pointe 1 dans le cas d'une couche mince d'épaisseur e_0 .

Dans le cas d'une couche mince d'épaisseur e_0 négligeable par rapport aux dimensions transversales, on admet que les équipotentielles créées par une pointe où circule un courant électrique sont de forme cylindrique (figure 8(b)).

19) Prouver, par un raisonnement détaillé, que dans ce cas on aura accès à la valeur de la conductivité électrique γ_e du matériau par la relation :

$$\gamma_e = \frac{\ln 2 I}{\pi e_0 U}$$

20) Expliquer qualitativement le fait remarquable que la distance a n'intervient pas dans l'expression du rapport U/I que l'on peut déduire de la question précédente ?

On donne, figure 9, l'allure du facteur de transmission optique d'une surface-échantillon $S = 10 \text{ cm}^2$ d'un dispositif électrochrome à trioxyde de tungstène, mesuré à la longueur d'onde $\lambda = 550 \text{ nm}$, lorsqu'on le soumet alternativement aux différences de potentiels de coloration (-1V) et de décoloration (+1V).

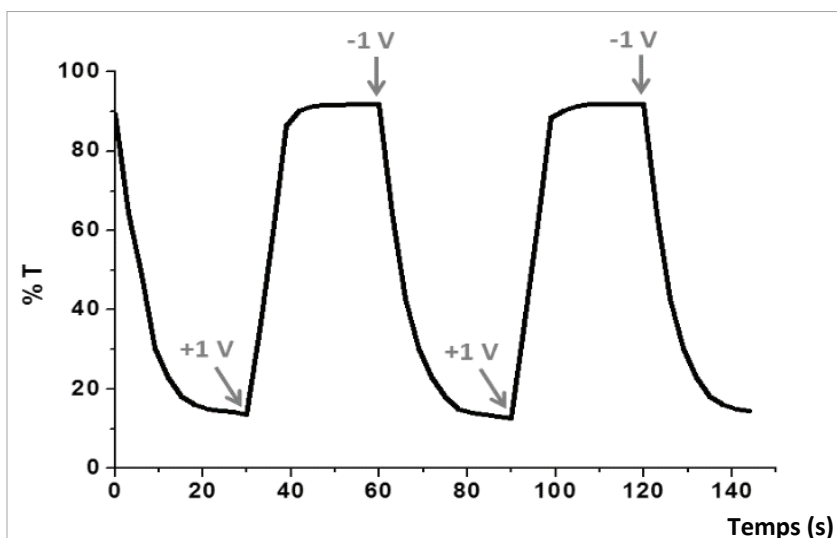


FIGURE 9 - Transmission optique d'une surface S d'un dispositif électrochrome, lors de l'application périodique, toutes les 30 secondes, des différences de potentiels de coloration et de décoloration

La figure 10 donne les variations de la quantité de charge électrique insérée dans la couche d'oxyde électrochrome, par unité de surface, en fonction de la différence de potentiel en régime stationnaire.

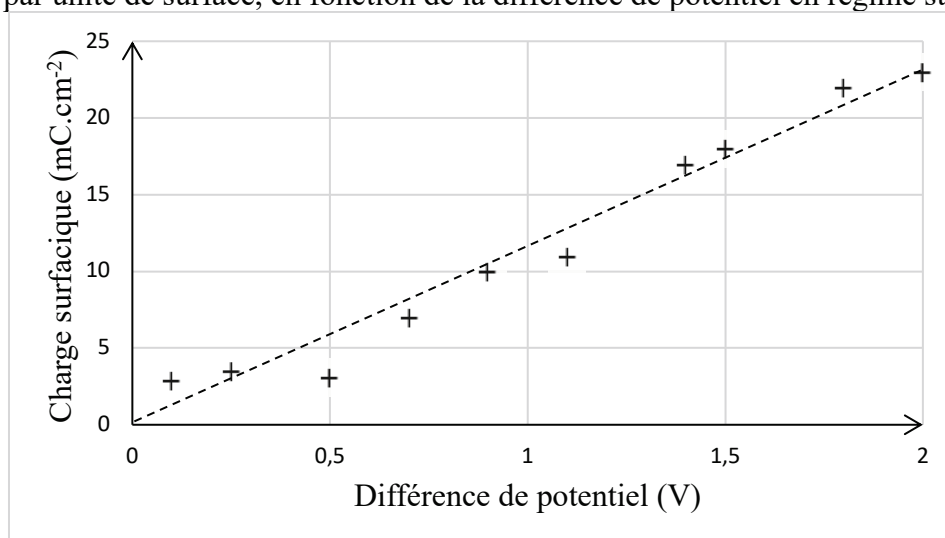


FIGURE 10 - Charge électrique insérée dans la couche électrochrome par unité de surface (en $\text{mC}\cdot\text{cm}^{-2}$) en fonction de la différence de potentiel en régime stationnaire

On cherche à modéliser (très simplement) cet élément de dispositif électrochrome à cinq couches, de surface $S = 10 \text{ cm}^2$, par un simple dipôle RC série :

- chaque couche électroconductrice OCT, d'épaisseur $e_0 = 250 \text{ nm}$, et de conductivité électrique mesurée par la méthode des quatre pointes, est équivalente à une résistance $R_e = 4 \Omega$;
- la migration des ions, en phase transitoire, est un facteur contribuant à limiter le temps de réponse du système. On modélise cette situation en admettant que la résistance R_e est en série avec une résistance R_i essentiellement due à la résistance ionique de l'électrolyte.

21) Dans le modèle simple adopté, on suppose que la transmission optique du dispositif est une fonction affine de la tension aux bornes de la capacité du circuit RC. Estimer la valeur de la résistance ionique R_i de l'échantillon de surface 10 cm^2 . Commenter le résultat.

II. Isolation phonique des vitrages

On s'intéresse dans cette partie à la transmission du son à travers un vitrage qui sépare deux demi-espaces d'air, dans la gamme de fréquences de l'audible de 20 Hz à 20 kHz.

Dans un premier temps, on établit les résultats fondamentaux concernant la propagation du son dans l'air. On suppose l'air au repos, à la température T_0 , à la pression $P_0 = 10^5$ Pa. Il est assimilé à un gaz parfait de masse volumique à l'équilibre ρ_0 , de coefficient $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$ et de masse molaire $M = 29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Du point de vue thermodynamique, les évolutions de l'air associées aux ondes sonores sont considérées comme isentropiques et caractérisées par le coefficient de compressibilité isentropique χ_s .

On ne tient pas compte de la gravité.

En présence de l'onde acoustique, les champs de pression et masse volumique deviennent :

$$P(M, t) = P_0 + p(M, t) \text{ avec } p(M, t) \text{ la surpression acoustique.}$$

$$\rho_{tot}(M, t) = \rho_0 + \rho(M, t).$$

Le champ des vitesses est noté $\vec{v}(M, t)$.

22) Préciser les hypothèses qui constituent « l'approximation acoustique ».

Écrire l'équation d'Euler et l'équation de conservation de la masse.

En déduire deux équations linéarisées en $p(M, t)$, $\rho(M, t)$ et $\vec{v}(M, t)$ en justifiant avec soin les approximations utilisées.

D'autre part, on rappelle la définition de la compressibilité isentropique d'un fluide : $\chi_s = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_S$, que l'on linéarise également : $\chi_s \cong \frac{\rho}{\rho_0 p}$

Par découplage des équations ainsi linéarisées, on obtient $\Delta p - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$ avec $\frac{1}{c_s^2} = \rho_0 \chi_s$.

23) Dans le modèle du gaz parfait, établir l'expression de la célérité c_s en fonction de la température T .

A l'aide des données numériques fournies en début d'énoncé, calculer c_s pour $T_0 = 293$ K.

On s'intéresse, dans toute la suite, au cas particulier d'une onde acoustique plane, harmonique de pulsation ω , progressive dans la direction \vec{u}_z , d'amplitude de surpression p_a .

24) Quel(s) argument(s) peut-on donner en faveur de la restriction de l'étude à une onde acoustique strictement harmonique ?

25) On définit l'impédance acoustique dans le fluide par : $Z_c = \frac{p}{v}$, dans le cas d'une onde progressive.

Établir l'expression de cette impédance en fonction de ρ_0 et c_s . Évaluer sa valeur dans l'air au repos.

26) On appelle $\vec{\Pi} = p\vec{v}$ le vecteur de Poynting acoustique. Rappeler sa signification physique.

L'intensité sonore I est donnée par la relation $I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$, où $\langle \rangle$ représente l'opération de moyenne temporelle.

27) Exprimer l'intensité sonore I en fonction de p_a , ρ_0 et c_s .

- 28) Pour un niveau sonore de 40 dB, c'est-à-dire une intensité sonore $I_0 = 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, évaluez les amplitudes des grandeurs progressives associées à cette onde, p_a pour la surpression, v_0 pour la vitesse et θ_0 pour la variation de température autour de T_0 . Commentez les valeurs obtenues.

On cherche *a posteriori* à justifier l'hypothèse d'évolution adiabatique réversible. On rappelle que dans un milieu homogène de diffusivité thermique D_{th} le champ de température $T(M, t)$ vérifie l'équation de diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T .$$

- 29) Donner les étapes principales du raisonnement permettant d'établir cette équation de diffusion thermique, en identifiant les notions, lois et principes mobilisés. La réponse n'excédera pas une dizaine de lignes ; elle ne comportera pas de détails analytiques, mais pourra s'appuyer sur un schéma.
- 30) Justifier, à l'aide de grandeurs caractéristiques de temps, l'hypothèse d'évolution isentropique de l'air associée à une onde sonore. On donne la valeur numérique de la diffusivité thermique de l'air $D_{th,air} = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

On s'intéresse maintenant à la propagation du son dans un vitrage.

Dans le domaine de températures usuellement rencontrées dans les applications domestiques, le verre est un solide « parfaitement » élastique qui obéit à la loi de Hooke. Celle-ci prévoit que la contrainte mécanique σ , définie comme une force par unité de surface, est liée à l'allongement relatif $\frac{\delta l}{l}$ par une loi linéaire, qui s'écrit $\sigma = E \frac{\delta l}{l}$, où E est appelé module d'Young.

- 31) En explicitant hypothèses et notations, mener le raisonnement qui conduit à établir l'équation de propagation de l'onde acoustique dans le vitrage.
Donner alors l'expression de la célérité de l'onde c_v en fonction des paramètres.
Déduire de la valeur numérique tabulée de c_v une valeur de E que l'on comparera à celle tabulée.

La suite de cette partie s'intéresse à l'atténuation acoustique à travers un vitrage. Pour simplifier, on limite ici l'étude à l'incidence normale. On envisage donc un vitrage plongé dans l'air au repos, les deux milieux de part et d'autre du vitrage étant considérés identiques dans cette étude (en particulier, pas de différence de température), assimilés à un gaz parfait de température T_0 , de pression P_0 , de masse volumique ρ_0 hors onde acoustique.

On peut montrer qu'aux fréquences considérées, on peut, en première approximation, négliger l'influence du châssis sur lequel est monté ce vitrage et considérer que celui-ci se déplace sous la seule influence des ondes sonores existant de part et d'autre. En particulier, on peut considérer que les effets de l'élasticité du verre sont négligeables : l'épaisseur e est supposée constante et le simple vitrage vibre « en bloc », sans frottements.

On définit l'atténuation d'une onde à la traversée du vitrage par :

$$R = -10 \times \log \left(\frac{I_t}{I_i} \right), \text{ où } R \text{ est en décibel (dB).}$$

Le vitrage est ici une lame de verre simple d'épaisseur e , homogène isotrope de masse volumique ρ_v , à la température T_0 . La direction normale à ce vitrage est \vec{u}_z .

- 32) Pour les fréquences audibles et pour un vitrage usuel d'épaisseur $e = 4$ mm, justifier que l'on peut décrire la vitre comme une plaque mince (c'est-à-dire sans épaisseur) pouvant se déplacer selon \vec{u}_z et de masse surfacique σ_v que l'on exprimera en fonction des données.

Le vitrage simple est soumis à une onde acoustique plane harmonique de fréquence f , d'amplitude de surpression $p_{i,0}$, incidente dans l'air des $z < 0$ dans la direction \vec{u}_z .

La vibration de la plaque mince induit l'existence d'une onde réfléchie de surpression \underline{p}_r , et une onde transmise de surpression \underline{p}_t .

- 33) Justifier que ces trois ondes sont harmoniques de pulsation ω , et se propagent selon l'axe Oz .
En notant les amplitudes complexes de surpression $p_{r,0}$ pour l'onde réfléchie et $p_{t,0}$ pour l'onde transmise, écrire les couples de fonctions : $\left(\underline{p}_i(z, t), \underline{v}_i(z, t)\right)$, $\left(\underline{p}_r(z, t), \underline{v}_r(z, t)\right)$ et $\left(\underline{p}_t(z, t), \underline{v}_t(z, t)\right)$.

- 34) On note $\underline{w}(t)$ la position complexe du vitrage autour de $z = 0$, $\underline{w}(t)$ étant une fonction harmonique de pulsation ω et d'amplitude complexe w_0 . Montrer que l'on peut écrire :

$$-\sigma_v \omega^2 w_0 = 2p_{i,0} - 2j\omega Z_c w_0$$

- 35) Obtenir la transmission acoustique $\frac{p_{t,0}}{p_{i,0}}$ et l'écrire sous la forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe bas du premier ordre, dont on donnera l'expression de la fréquence de coupure f_c en fonction de Z_c et σ_v . Calculer numériquement f_c .

- 36) Montrer alors que l'atténuation à travers le vitrage simple s'écrit : $R = 10 \log \left(1 + \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 \right)$

Esquisser le graphe R en fonction de $\log \left(\frac{f}{f_c} \right)$ dans la copie, en faisant apparaître plusieurs décades.

Décrire le comportement du simple vitrage prévu par ce modèle du point de vue de l'atténuation acoustique.

Comment faut-il choisir le simple vitrage pour une bonne atténuation acoustique ?

On s'intéresse désormais à un double vitrage, dont on veut modéliser l'atténuation acoustique. Pour simplifier, on envisage donc un vitrage plongé dans l'air au repos : les deux milieux de part et d'autre du double vitrage sont identiques dans cette étude, sans différence de température, assimilés à un gaz parfait de température T_0 , de pression P_0 , de masse volumique ρ_0 hors onde acoustique.

Le double vitrage est constitué de deux vitres identiques, parfaitement parallèles, chacune d'épaisseur e , séparés par un espace intercalaire d'épaisseur d d'air, assimilé à un gaz parfait de température T_0 , de pression P_0 , de masse volumique ρ_0 hors onde acoustique. La situation est schématisée sur la figure 11.

L'influence du bâti est toujours négligée, l'excitation du système est une onde acoustique plane harmonique de fréquence f , d'amplitude de surpression $p_{0,i}$, incidente dans l'air des $z < 0$ dans la direction \vec{u}_z , sous incidence normale donc.

Chacune des vitres vibre en bloc selon l'axe Oz :

- la vitre « à gauche » autour de $z = 0$ avec une amplitude $\underline{w}_g(t) = w_{g,0} \cdot \exp(j\omega t)$
- la vitre « à droite » autour de $z = d$ avec une amplitude $\underline{w}_d(t) = w_{d,0} \cdot \exp(j\omega t)$.

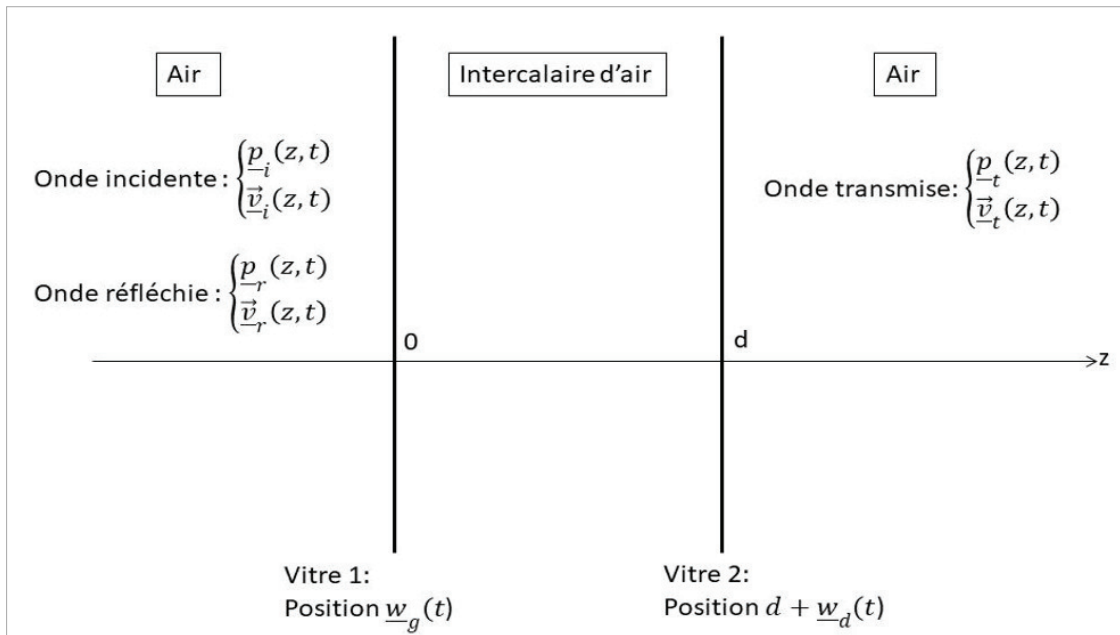


FIGURE 11 – Double vitrage étudié.

Conformément aux résultats précédents, l'épaisseur des vitres est représentée nulle.

37) Justifier que l'on peut considérer que la pression dans la cavité est uniforme.

On note désormais \underline{p}_c la représentation complexe de la surpression de l'onde acoustique dans la cavité intercalaire d'air.

38) Montrer que, dans l'hypothèse d'une évolution adiabatique, la surpression de l'air peut s'y exprimer par la relation :

$$\underline{p}_c = \frac{\rho_0 c_s^2}{d} (\underline{w}_g - \underline{w}_d)$$

Écrire les équations du mouvement des vitres à gauche et à droite.

Le double vitrage est analogue au système mécanique à une dimension de type « masse – ressort – masse » représenté sur la figure 12.

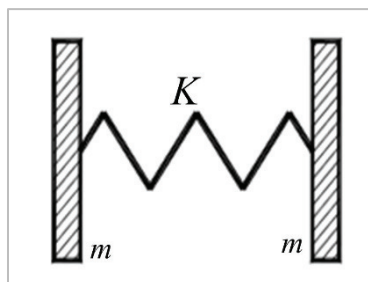


FIGURE 12 - Système équivalent masse – ressort – masse.

Les deux masses m sont identiques et correspondent à la masse d'une section S d'une face du vitrage. Le ressort qui les relie est de raideur K , sans masse, dans son domaine d'élasticité.

On note $u_g(t)$ et $u_d(t)$ les déplacements des masses par rapport à leur position à l'équilibre, pour lequel le ressort a sa longueur à vide.

39) Écrire l'équation du mouvement de régime libre de chacune des deux masses. Exprimer enfin la raideur K_{eq} qui convient pour un système analogue au double vitrage, en fonction de ρ_0 , c_s , d et S .

40) Dédurre de la question précédente les modes propres de ce système, les commenter et montrer l'apparition d'une fréquence propre f_p dont on donnera l'expression en fonction de K et m .

41) Dans l'approximation $\frac{\omega \times d}{c_s} \ll 1$, des calculs non demandés aboutissent à l'expression suivante de la transmission acoustique $t_p = \frac{p_{t,0}}{p_{i,0}}$ du double vitrage :

$$t_p = \frac{j \frac{\rho_0 c_s}{\omega \sigma_v}}{1 - \frac{\omega^2 \sigma_v d}{2 \rho_0 c_s^2}}, \text{ qu'on peut donc ré-écrire } t_p = \frac{j \frac{\rho_0 c_s}{\omega \sigma_v}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c'}\right)^2}.$$

Comparer la fréquence f_c' associée à la pulsation ω_c' à la fréquence propre f_p obtenue question 40).

42) Un graphe expérimental d'atténuation acoustique en fonction de la fréquence est reproduit figure 13, pour un vitrage double « 4 – 12 – 4 », soit deux vitres de verre d'épaisseur $e = 4$ mm avec un intercalaire d'air d'épaisseur $d = 12$ mm.

En commentant précisément la courbe R donnée sur cette figure, discuter de la validité de l'expression théorique de la transmission acoustique :

- Décrire le comportement au voisinage de f_c' : on dira à quel phénomène cela correspond pour le système analogue « masse – ressort – masse » et on évaluera numériquement f_c' . Quel(s) phénomène(s) physique(s) non pris en compte dans le modèle limite(nt) ceci en réalité ?
- Déterminer le comportement asymptotique de l'atténuation acoustique R pour $f \ll f_c'$ et $f \gg f_c'$. Commenter l'accord entre expérience et modèle théorique.

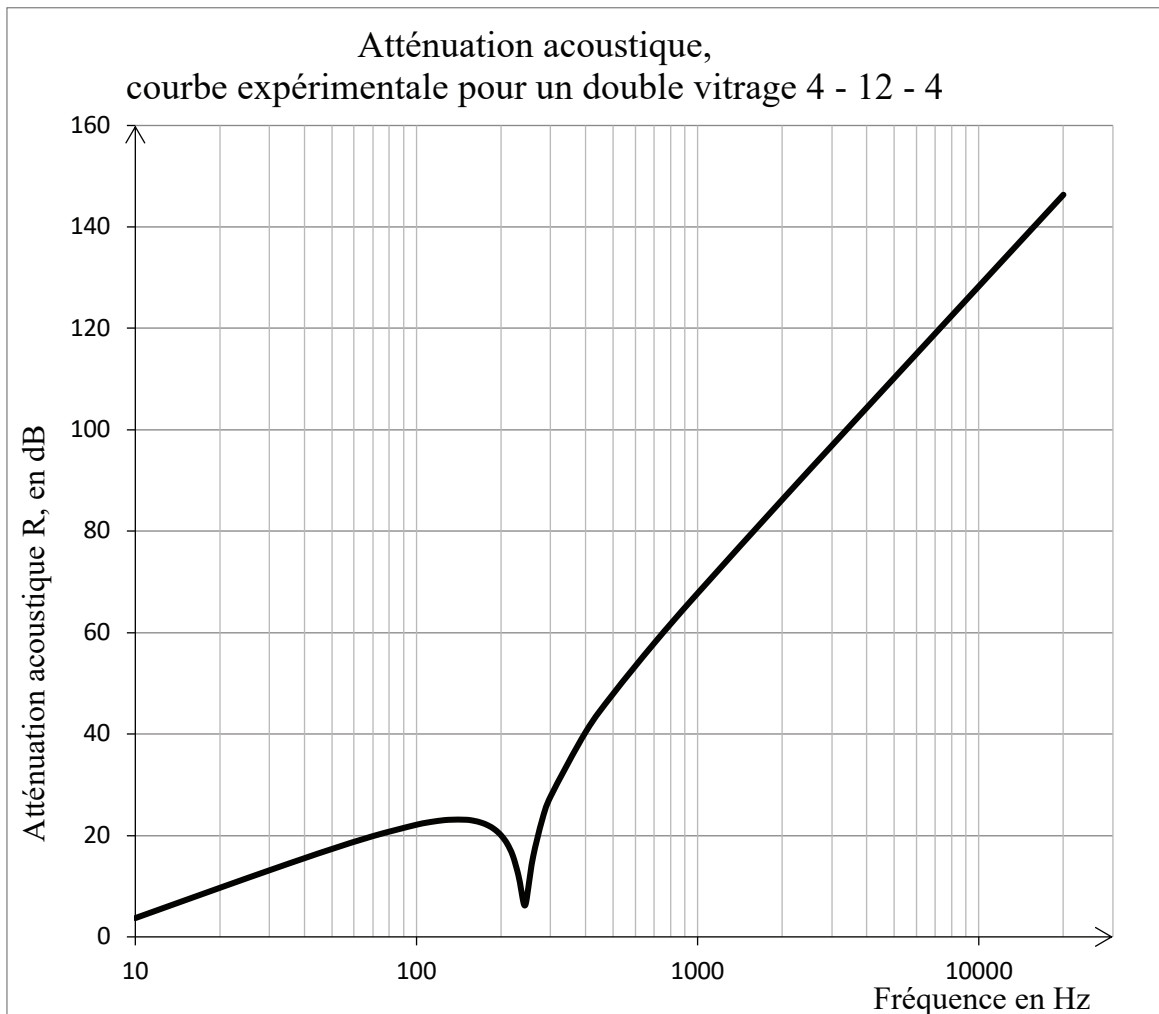


FIGURE 13 – Atténuation acoustique d'un double vitrage en fonction de la fréquence

III. Le verre, un matériau fragile

Dans le domaine des températures usuellement rencontrées dans les applications domestiques, le verre est un solide « parfaitement » élastique qui obéit à la loi de Hooke sans qu'un comportement plastique puisse être décelé avant sa rupture. Celle-ci survient brutalement, sans avertissement préalable, à l'endroit où une contrainte d'extension limite a été dépassée : c'est là le comportement caractéristique d'un matériau dit fragile.

Le comportement élastique d'un solide est le plus souvent caractérisé par le module d'élasticité E appelé aussi module d'Young et par le coefficient de Poisson noté ν .

On considère l'essai de traction unidirectionnel schématisé sur la figure 14 : sur une éprouvette de verre de longueur initiale l et de section carrée, de côté $a = 1$ cm, on applique une force unidirectionnelle, uniformément répartie sur la section de l'éprouvette, et d'intensité $F = 700$ N.

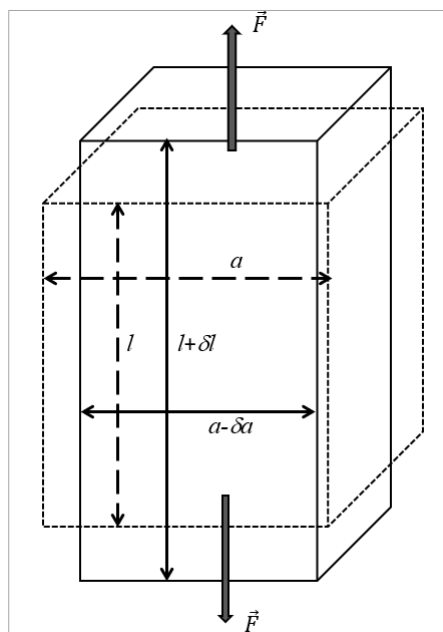


FIGURE 14 - Déformation d'une éprouvette de verre soumise à une traction unidirectionnelle

Le coefficient de Poisson est défini par la relation $\nu = \frac{\delta a/a}{\delta l/l}$ et il vaut 0,2 pour le verre.

La loi de Hooke prévoit que la contrainte σ , définie comme une force par unité de surface, est liée à l'allongement relatif $\frac{\delta l}{l}$ par une loi linéaire, qui s'écrit $\sigma = E \frac{\delta l}{l}$, où E est appelé module d'Young.

43) Donner la valeur numérique de l'allongement relatif $\delta l/l$ mesuré ici.

Quand un vitrage est placé dans son châssis il peut être partiellement ensoleillé. La partie insolée va donc s'échauffer plus fortement que la partie à l'ombre et, si l'écart de température est trop important, il peut y avoir une casse dite « casse d'origine thermique ».

Soit $\alpha = 8,9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ le coefficient de dilatation thermique linéique du verre. On considère l'éprouvette de verre de la figure 14, dont la longueur est maintenant maintenue invariable par le châssis, lui-même supposé indéformable. On élève la température de l'échantillon de ΔT , de façon uniforme.

44) Établir l'expression de la contrainte σ , qui s'exerce alors aux extrémités du verre, en fonction de α , E et ΔT . Calculer la valeur de l'écart de température provoquant la rupture de l'éprouvette, sachant que la contrainte longitudinale de rupture vaut $\sigma_{rupture} = 40$ MPa pour un verre courant (verre non trempé).

La surface du verre est très dure, seulement rayable par des matériaux plus durs comme le diamant. Cependant c'est l'état de cette surface qui détermine la résistance mécanique du verre. Dès 1920 Griffith postule l'existence de minuscules fissures, dites « failles de Griffith » sur la surface du verre. Celles-ci sont susceptibles de se propager, notamment en présence de faibles quantités de vapeur d'eau, et c'est cette propagation qui conduit à la rupture du verre. On a pu observer, plus tard, l'existence de ces microfissures, ainsi que leur propagation, grâce à la microscopie à forces atomiques.

Afin de parvenir à l'expression mathématique du critère de Griffith, nous nous limitons à l'exemple d'une plaque mince d'épaisseur e soumise à une contrainte de traction unidirectionnelle σ et dont la fissure est une entaille de faible profondeur $b \ll e$, s'étendant sur toute l'épaisseur de la plaque (figure 15).

On peut montrer que la croissance de l'entaille, tout en maintenant fixes les points d'application des forces appliquées (mors fixes), a pour effet :

- une augmentation d'énergie $2\gamma_{ts}eb$, où γ_{ts} est un paramètre caractéristique de l'interface verre/air,
- la libération de l'énergie $\frac{\pi eb^2\sigma^2}{2E}$ emmagasinée dans le matériau : la zone soulagée de cette énergie apparaît en grisé sur la figure 15.

Ainsi, dans le modèle de Griffith, l'enthalpie libre G de la plaque peut s'écrire :

$$G = G_0 - \frac{\pi eb^2\sigma^2}{2E} + 2\gamma_{ts}eb,$$

où G_0 est l'enthalpie libre de la plaque avant apparition de la fissure.

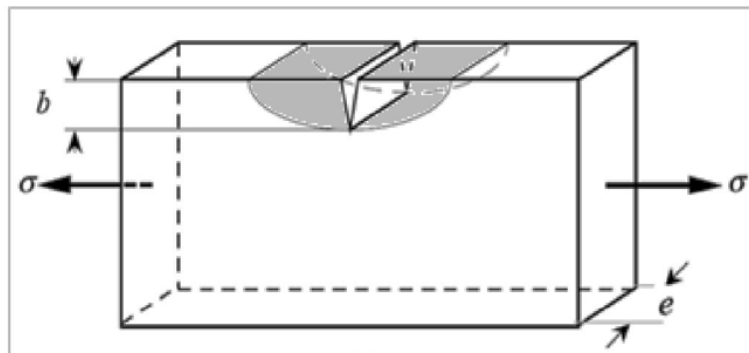


FIGURE 15 - Représentation schématique d'une plaque fissurée soumise à un essai de traction.

45) On considère que le système évolue en contact avec l'atmosphère, de température T_0 et de pression P_0 constantes. En début et en fin d'évolution, la plaque est en équilibre thermique et mécanique avec l'environnement. Montrer que l'enthalpie libre G de la plaque ne peut que diminuer ou rester constante.

46) En raisonnant par analogie proposer une origine physique pour les deux termes énergétiques liés à la présence de la fissure : $\frac{\pi eb^2\sigma^2}{2E}$ et $2\gamma_{ts}eb$. Comment s'appelle habituellement la constante γ_{ts} ?

47) Donner l'expression de la dimension b_{eq} de la faille qui correspond à l'équilibre de celle-ci sous la contrainte σ . Discuter la stabilité de l'équilibre et décrire l'évolution prévisible d'une fissure de profondeur initiale $b < b_{eq}$ et d'une autre de profondeur initiale $b > b_{eq}$.

ANNEXE : Code Python (Questions 15 à 18)

```
01 | #!/usr/bin/env python
02 | # coding: utf-8
03 |
04 | import numpy as np
05 | from math import pi
06 | import matplotlib.pyplot as plt
07 |
08 | # Préparation des listes basées sur les valeurs expérimentales
09 | N=[1.865, 1.862, 1.847, 1.812, 1.807, 1.807]
10 | Lambda=[0.4047, 0.4078, 0.4358, 0.5461, 0.5770, 0.5791]
11 | Dm=[77+39/60, 77+11/60, 74+53/60, 69+55/60, 69+15/60, 69+14/60]
12 | InvL2=[]
13 | for i in range(6):
14 |     InvL2.append(1/(Lambda[i]**2))
15 |
16 | # Tracé de la droite d'ajustement et des points expérimentaux
17 | res=np.polyfit(InvL2,N,1)
18 | xfit=np.linspace(min(InvL2),max(InvL2),2)
19 | plt.plot(xfit, res [0]*xfit + res [1], 'r', label='Régression linéaire')
20 | plt.errorbar(InvL2,N,xerr=0,yerr=0,fmt='b+',label='Mesures')
21 | plt.xlabel("Inverse de la longueur d'onde au carré")
22 | plt.ylabel("Indice optique n")
23 | plt.legend()
24 | plt.show()
25 |
26 | # Calcul des incertitudes pour chaque point et affichage des valeurs
27 | dN=[]
28 | for i in range(6):
29 |     dN.append(N[i]*0.5*1/(np.tan(0.5*(pi*60/180 + pi*Dm[i]/180)))*0.1*pi/180)
30 | print("Incertitudes:")
31 | print(dN)
32 |
33 | # Ecart entre les valeurs du modèle linéaire et les valeurs expérimentales
34 | Ecarts=[]
35 | for i in range(6):
36 |     Ecarts.append(res[0]*InvL2[i]+res[1]-N[i])
37 | print("Ecart:")
38 | print(Ecarts)
39 |
40 | # **Monte-Carlo**
41 | NbreIterations=10000
42 | Valn0,ValB = [],[]
43 | for i in range(NbreIterations):
44 |     x=InvL2
45 |     y=[]
46 |     for j in range(6):
47 |         y.append(N[j]+dN[j]*np.random.uniform(-1,1))
48 |     p1,p2=np.polyfit(x,y,1)
49 |     ValB.append(p1)
50 |     Valn0.append(p2)
51 |
52 | # Tracé des histogrammes
53 | plt.hist(ValB, range=(0.018,0.019), bins =
100,color="blue",edgecolor="black",label='Histogramme pour B')
54 | plt.legend()
55 | plt.show()
56 | plt.hist(Valn0, range=(1.749,1.754), bins =
100,color="blue",edgecolor="black",label='Histogramme pour n0')
57 | plt.legend()
58 | plt.show()
```