

EAE PHP 3

SESSION 2021

**AGREGATION
CONCOURS EXTERNE**

**Section : PHYSIQUE-CHIMIE
Option : PHYSIQUE**

PROBLÈME DE PHYSIQUE

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1500A	103	0889

Ondes non linéaires de déplétion et d'élévation

Ce sujet porte sur la propagation d'ondes dispersives et non linéaires à l'interface entre deux fluides. Il comporte quatre parties, rédigées de sorte à être très largement indépendantes. Si la partie I sert de bases aux suivantes, tous les résultats nécessaires pour aborder la suite du problème sont fournis aux candidat-e-s, qui pourront les admettre. Les parties suivantes sont elles strictement indépendantes, et les candidat-e-s pourront les aborder dans l'ordre de leur choix.

La partie I s'intéresse aux ondes à la surface libre d'un fluide, en régime linéaire. Les conditions de validité de l'approximation linéaire sont discutées. Les forces de gravité ainsi que les forces capillaires sont prises en compte, et le caractère dispersif de la propagation des ondes de surface est explicité.

La partie II introduit le concept de vitesse de groupe d'un paquet d'onde, dans un cadre général d'un milieu de propagation linéaire et dispersif. Dans un deuxième temps, on étudie la propagation de l'énergie dans le contexte des ondes de surface, et on démontre le lien entre vitesse de groupe et vitesse de propagation de l'énergie.

La partie III concerne une étude expérimentale de la vitesse de phase d'ondes à l'interface entre le mercure et l'air. Des précisions sur le dispositif expérimental et sur les méthodes de mesures sont données dans trois Annexes. On étudie le dispositif expérimental, les méthodes de mesures ainsi que les principes de fonctionnement des capteurs utilisés. Dans cette partie du problème on aborde plusieurs domaines différents de la physique, les questions font principalement appel à de l'analyse dimensionnelle et à la recherche d'ordre de grandeurs plutôt qu'à des résultats exacts.

La partie IV s'attache aux effets non linéaires sur la propagation d'ondes de surface. La propagation est décrite par l'équation de Korteweg-de Vries, qui est justifiée de manière heuristique. On développe ensuite une analogie mécanique qui permet de calculer la forme d'une *onde solitaire*, excitation non linéaire se propageant sans déformation dans le milieu dispersif. Les propriétés de cette solution sont alors confrontées aux observations expérimentales détaillées dans les Annexes.

Trois annexes complètent l'énoncé. Dans l'annexe A on donne les valeurs numériques de plusieurs paramètres physiques. Le choix a été fait, ainsi que dans le reste de l'énoncé, d'exprimer ces valeurs en unités du Système International, mais ces unités ne sont pas explicitées. L'annexe B regroupe des extraits d'un article dont la lecture est indispensable à la résolution des questions qui y font référence. Enfin, l'annexe C contient l'ensemble des figures illustrant les observations expérimentales discutées dans le texte (Figures 6 à 10).

I Ondes à la surface libre d'un liquide

Dans cette partie, on s'intéresse à la propagation des ondes à la surface libre d'un liquide placé dans un champ de pesanteur uniforme d'accélération de la pesanteur $g > 0$. L'espace est rapporté à un référentiel galiléen (R). Ce référentiel est associé à un repère orthonormé direct $(0, x, y, z)$ d'origine O , et l'axe Oz est supposé vertical orienté vers le haut, soit $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Au repos, la surface du fluide est plane et définit le plan $x0y$.

On s'intéresse à des ondes planes se propageant selon l'axe Ox . À l'instant t et à la position x , la surface libre du fluide est à une altitude $\eta(x, t)$. La couche de fluide est limitée vers le bas par une surface plane imperméable d'altitude $z = -h$. La surface libre est en contact avec l'atmosphère dont la pression P_{atm} est constante dans le temps et uniforme. La Fig. 1 précise ces notations.

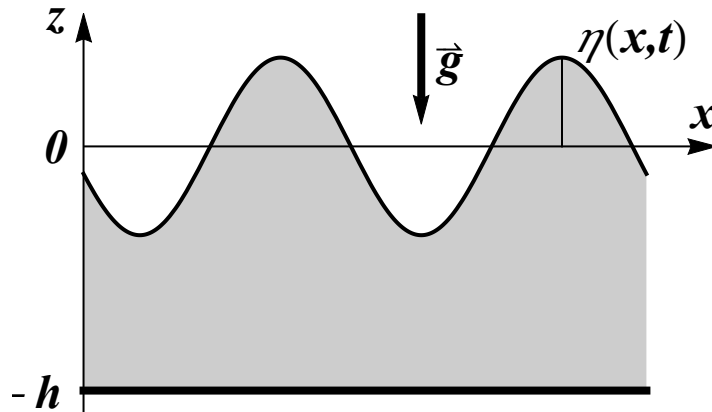


FIGURE 1 – Déformation de la surface libre du liquide.

On suppose le fluide newtonien et incompressible. Sa dynamique est donc décrite par les équations ci-dessous :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}, \quad (2)$$

où les paramètres μ et ρ sont supposés constants.

I.1 Relation de dispersion des ondes de surface.

- 1) Une onde se traduit par une quantité physique dépendant à la fois de l'espace et du temps. À l'exception des ondes à la surface d'un fluide, objet de cette première partie, proposer un exemple d'onde, de telle sorte que son milieu de propagation soit unidimensionnel. Proposer de même un exemple d'onde se propageant dans un milieu bidimensionnel, puis dans un milieu tridimensionnel. Préciser dans chaque cas la nature du milieu de propagation.
- 2) Dans un milieu où la propagation de l'onde est linéaire et dans lequel il existe une relation entre la pulsation ω et le nombre d'onde k , appelée *relation de dispersion*, définir la vitesse de phase notée c_ϕ .
- 3) Identifier les variables physiques p et \vec{v} , et préciser leurs unités. Préciser la signification physique du champ de vecteur $\vec{v}(x, y, z, t)$ dans les équations (1) et (2).
- 4) Identifier les paramètres μ et ρ et préciser leurs unités.

- 5) Quelle est la définition d'un fluide Newtonien ? Quel(s) terme(s) de l'équation de Navier-Stokes traduit(sent) cette définition ?
- 6) Supposer que l'écoulement étudié est incompressible vous paraît-il une approximation raisonnable lors de l'étude des ondes de surface ? Justifier votre réponse à l'aide d'ordres de grandeurs tirés de l'Annexe A et des figures 6 et 9 de l'Annexe C.
- 7) Construire à partir des constantes μ et ρ une quantité homogène à un coefficient de diffusion, notée ν . À partir d'une longueur naturellement associée à l'onde de surface, exprimer un temps caractéristique de diffusion. À partir des données numériques disponibles et des figures fournies, estimer ce temps caractéristique de diffusion pour le mercure. Conclure.
Désormais les phénomènes visqueux ne seront pas pris en compte. Simplifier en conséquence l'équation (2).
- 8) On note η_0 l'amplitude typique des ondes de surface, τ leur période typique et λ leur longueur d'onde typique. Sous quelle condition portant sur η_0 et λ peut-on négliger le terme non-linéaire des équations de Navier-Stokes ?
- 9) Pour toute la suite du problème, on suppose le fluide *incompressible* et *non visqueux*. Pour toute la suite de cette partie, on se place dans le cadre de *l'approximation linéaire* (c'est-à-dire qu'on ne prend pas en compte le terme non-linéaire des équations de Navier-Stokes).
Montrer que la vitesse du fluide peut être décrite comme le gradient d'un potentiel scalaire $\Psi(x, z, t)$,

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\nabla} \Psi.} \quad (3)$$

Obtenir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le potentiel, et montrer que l'on peut écrire

$$\boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{P_{atm}}{\rho}.} \quad (4)$$

- 10) On cherche des ondes planes monochromatiques de nombre d'onde k et de pulsation ω . On prend alors le potentiel des vitesses, défini à une fonction du temps quelconque près, sous la forme

$$\Psi(x, z, t) = F(z) \cos(kx - \omega t). \quad (5)$$

Obtenir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $F(z)$. (On rappelle que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} g) = \Delta g$ où Δ est l'opérateur laplacien, et g une fonction scalaire quelconque de l'espace et du temps)

- 11) Quelle est la condition sur la vitesse du fluide au fond, pour $z = -h$? En déduire une condition sur le potentiel des vitesses Ψ . Exprimer alors la fonction $F(z)$.
- 12) Exprimer la condition à la surface libre sur la vitesse du fluide. Simplifier cette relation dans le cadre de l'approximation linéaire et montrer qu'elle se traduit par

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial t} \approx \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=0}.} \quad (6)$$

- 13) Pour une onde plane monochromatique, la surface libre est donnée par

$$\eta(x, t) = \eta_0 \sin(kx - \omega t), \quad (7)$$

où η_0 est une constante homogène à une longueur. En déduire $F(z)$ en fonction de k , ω , h , η_0 et z .

- 14) Définir la tension de surface γ entre deux fluides en terme d'énergie, et en préciser une unité. La tension de surface admet aussi une interprétation en terme de force. Proposer un schéma appuyant cette interprétation, et préciser l'orientation de la force.
- 15) À la traversée d'une interface de rayon de courbure R entre deux fluides, la tension de surface induit une discontinuité de pression donnée par la loi de Laplace (voir Fig. 2)

$$P_{int} - P_{ext} = \frac{\gamma}{R}. \quad (8)$$

Dans le cas d'une interface d'équation $\eta(x, t)$, la courbure $1/R$ est donnée par

$$\frac{1}{R} = \frac{-\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (9)$$

Sous quelle condition peut-on linéariser cette expression de la courbure en fonction de η et ses dérivées ? Est-elle compatible avec la linéarisation de l'équation (2) ?

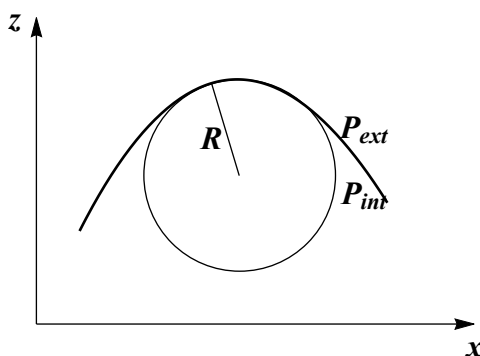


FIGURE 2 – Schéma d'une interface courbe $z = \eta(x)$, avec les mêmes notations que dans l'Eqn. (8). Dans un but de simplification, la courbure dans la direction normale à la feuille de papier est supposée nulle.

- 16) Au dessus de l'interface, $z > \eta(x, t)$, la pression est constante et uniforme, égale à P_{atm} . Utiliser les résultats précédents pour exprimer de deux façons différentes la pression dans le fluide juste sous l'interface, à la limite $z \rightarrow \eta^-$. Procéder à une linéarisation si nécessaire.
- 17) En déduire la relation de dispersion

$$\omega(k) = \sqrt{\left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3\right) \text{th}kh}. \quad (10)$$

II Vitesse de groupe et propagation de l'énergie

II.1 Notion de vitesse de groupe

On considère maintenant un milieu de propagation *dispersif* et *linéaire*. Une onde de nombre d'onde k a donc une pulsation $\omega(k)$. On définit un *paquet d'onde* comme une onde de durée et d'extension spatiale limitées. On considère un paquet d'onde qui se propage selon la direction Ox d'un référentiel galiléen $R(0, x, y, z)$ d'origine O . On suppose connue sa forme à l'instant initial $t = 0$,

$$u(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{ikx} dk, \quad (11)$$

où $i^2 = -1$ et où

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t = 0) e^{-ikx} dx. \quad (12)$$

À un instant ultérieur $t > 0$, l'amplitude de l'onde peut donc s'écrire :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk. \quad (13)$$

On fait par ailleurs les deux hypothèses suivantes :

- [H1] - On suppose que la distribution spectrale $\hat{u}(k)$ est piquée autour d'un nombre d'onde k_0 . Plus précisément, son module est négligeable au delà d'un intervalle $[k_0 - \delta k, k_0 + \delta k]$ avec $\delta k \ll k_0$.
- [H2] - On suppose que la relation de dispersion admet un développement de Taylor au voisinage de k_0 ,

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0) + \mathcal{O}[(k - k_0)^2] \quad (14)$$

On notera $\omega_0 \equiv \omega(k_0)$ et $\omega'_0 \equiv (d\omega/dk)_{k=k_0}$.

- 18) Proposer une expression de $\hat{u}(k)$ compatible avec l'hypothèse [H1]. En représenter schématiquement le module $|\hat{u}(k)|$, et la partie réelle de l'amplitude initiale de l'onde $u(x, t = 0)$ en fonction de x . Préciser l'expression de sa longueur d'onde typique λ_0 en fonction de k_0 . Indiquer sur le schéma de $u(x, t = 0)$ l'extension spatiale ΔL du paquet d'onde et la longueur d'onde λ_0 . Quelle inégalité vérifie ΔL vis à vis de λ_0 ?
- 19) Donner un exemple de milieu de propagation où le développement (14) est impossible pour certaine(s) pulsation(s).
- 20) Montrer que sous les hypothèses [H1] et [H2], en première approximation, le paquet d'onde se propage sans déformation à une vitesse constante c_g , à part un facteur de phase global (c'est-à-dire indépendant de la position). On indiquera très soigneusement, chaque fois que nécessaire, laquelle des deux hypothèses [H1] ou [H2] intervient dans la démonstration. Exprimer la vitesse c_g en fonction de ω'_0 et vérifier qu'elle a bien la dimension physique d'une vitesse.
- 21) Quel phénomène physique pourrait-on mettre en évidence si on poussait le développement de Taylor (14) à l'ordre deux dans la démonstration précédente ? (le calcul n'est *pas* demandé !)

II.2 Propagation de l'énergie

Dans cette partie, pour simplifier les calculs, on suppose la profondeur du fluide infinie, $h \rightarrow +\infty$. Pour une onde plane monochromatique de nombre d'onde k et pulsation ω telle que $\eta(x, t) = \eta_0 \sin(kx - \omega t)$, le potentiel des vitesses s'écrit alors

$$\Psi(x, z, t) = -(\omega/k)\eta_0 e^{kz} \cos(kx - \omega t), \quad (15)$$

et la relation de dispersion devient

$$\omega^2 = gk + \gamma k^3 / \rho. \quad (16)$$

La valeur moyenne temporelle d'une fonction $f(t)$ périodique de période T est notée $\langle f \rangle$, avec

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (17)$$

On s'intéresse aux quantités énergétiques associées à la propagation de l'onde de surface. L'attention des candidat-e-s est attirée sur le fait que, pour être cohérent avec l'approximation linéaire faite jusqu'à présent, les quantités énergétiques doivent être calculées à l'ordre deux du petit paramètre.

Par ailleurs, on calcule non pas une énergie potentielle absolue, mais la variation d'énergie potentielle entre le cas où le fluide est à l'équilibre, immobile et avec une interface horizontale, et le cas où l'onde de surface induit un mouvement du fluide et une déformation de l'interface.

22) Déduire de l'Eqn. (16) la vitesse de groupe, notée c_g , que l'on exprimera en fonction de g , ρ , γ , k et ω .

23) On considère une tranche de fluide de profondeur infinie, d'épaisseur dx , de largeur L dans la direction Oy lorsque le fluide est au repos. Calculer la densité linéique d'énergie cinétique $e_K \equiv dE_K/dx$ où dE_K est l'énergie cinétique de la tranche d'épaisseur dx . Exprimer sa moyenne temporelle $\langle e_K \rangle$ en fonction de ρ , L , ω , k et η_0 .

24) Lorsque le fluide est au repos, la surface libre de la tranche de fluide est à l'altitude $z = 0$, et sous l'effet de l'onde elle passe à l'altitude $z = \eta(x, t)$. Calculer la densité linéique de la variation d'énergie potentielle de gravité $e_P^G \equiv dE_P^G/dx$ (où dE_P^G est la variation d'énergie potentielle de gravité de la tranche de fluide) en fonction de ρ , g , L et η . En déduire sa valeur moyenne $\langle e_P^G \rangle$ en fonction de ρ , L , g et η_0 .

25) Sous l'effet de la déformation de la surface libre due à l'onde, l'épaisseur dx de la tranche est modifiée en surface. Calculer sa nouvelle longueur dl à l'ordre le plus bas en $\partial\eta/\partial x$, puis la variation de surface de l'interface entre le liquide et l'atmosphère. En déduire la densité linéique de la variation d'énergie potentielle de capillarité $e_P^C \equiv dE_P^C/dx$ (où dE_P^C est la variation d'énergie potentielle de capillarité de la tranche de fluide), en fonction de γ , L et $\partial\eta/\partial x$. En déduire sa valeur moyenne $\langle e_P^C \rangle$ en fonction de γ , L , k et η_0 .

26) Montrer que

$$\langle e_K \rangle = \langle e_P^G \rangle + \langle e_P^C \rangle. \quad (18)$$

Commenter. Exprimer la densité linéique totale d'énergie $\langle \mathcal{E} \rangle = \langle e_K \rangle + \langle e_P^G \rangle + \langle e_P^C \rangle$ en fonction de ρ , ω , k , L et η_0 .

27) La variation de pression δp due à l'onde de surface est la correction au champ de pression hydrostatique. Montrer que

$$\delta p = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (19)$$

En déduire la puissance Π_P des forces de pression dues à l'onde de surface traversant une surface plane d'abscisse x de la gauche vers la droite (c'est-à-dire dans le sens de propagation de l'onde), dont la hauteur est celle, infinie, de la couche de fluide et dont la largeur est L dans la direction Oy . Exprimer sa moyenne temporelle $\langle \Pi_P \rangle$ en fonction de ρ , ω , k , L et η_0 .

28) De même, calculer la puissance Π_C des forces capillaires traversant un plan d'abscisse x de la gauche vers la droite, pour une largeur L dans la direction Oy . Préciser sur un schéma l'orientation de la force capillaire à prendre en compte. Exprimer sa moyenne temporelle $\langle \Pi_C \rangle$ en fonction de γ , ω , k , L et η_0 .

29) Exprimer la puissance totale $\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \Pi_P \rangle + \langle \Pi_C \rangle$. Montrer que $\langle \mathcal{P} \rangle / \langle \mathcal{E} \rangle$ est homogène à une vitesse, et exprimer cette vitesse en fonction de g , ρ , γ , k et ω . Conclure.

III Étude expérimentale de la vitesse de phase

La résolution de cette partie du problème nécessite la lecture des documents rassemblés dans les Annexes B.1 et B.2, qui explicitent les conditions expérimentales dans lesquelles ont été obtenues les Figs. 6, 7, 8, 9 et 10. La notation tient compte du temps de lecture nécessaire.

III.1 Mesure de l'amplitude des ondes de surface

- 30) Dans l'Annexe B.1, les auteurs précisent avoir choisi le mercure pour mener à bien leur étude expérimentale. Commenter ce choix.
- 31) Faire un schéma clair du dispositif expérimental. Indiquer ses dimensions, la position de l'émetteur, ainsi que celle des deux capteurs inductifs.
- 32) Expliquer le principe des mesures optiques à l'aide d'un schéma clair. Expliquer en particulier en quoi cette mesure est sensible à la pente de la surface libre et pas directement à la position de celle-ci. Cette mesure utilise un capteur CCD linéaire de 8 192 pixels, chaque pixel étant un carré de $5 \mu\text{m}$ de coté. Estimer la distance entre le capteur CCD et la surface du fluide si l'on veut pouvoir enregistrer l'intégralité de la déformation de la surface libre, comme dans les Figures 7 et 9.
- 33) Les auteurs ont employé un Laser dans leur étude. Comparer la résolution spatiale des mesures optiques à celle des capteurs inductifs, qui est du même ordre de grandeur que leurs dimensions latérales.

III.2 Principe d'un capteur inductif

Les *capteurs inductifs* évoqués dans l'Annexe B.1 sont aussi appelés *capteurs à courants de Foucault* (Ang. *eddy-current sensors*). Ils sont constitués d'une bobine inductive parcourue par un courant alternatif d'environ 800 kHz de fréquence. La bobine est l'inductance L d'un circuit résonant RLC . Un dispositif électronique mesure la fréquence de résonance en fonction de la distance Δd de la bobine à une cible conductrice. Dans cette question, on cherche uniquement la loi d'échelle entre la variation Δf de la fréquence de résonance et Δd . La bobine sera remplacée par une boucle de courant circulaire de rayon a , contenue dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz passant par son centre, parcourue par un courant I . Les candidat-e-s préciseront les approximations qu'ils ou elles seront amené-e-s à faire.

- 34) Rappeler l'expression du moment magnétique d'une boucle de courant.
- 35) Schématiser la forme des lignes du champ magnétique créé par une boucle de courant, et préciser les éventuelles symétries de la figure.
- 36) Rappeler l'orientation et l'amplitude du champ magnétique créé par la boucle de courant sur son axe, à une distance Δd de son centre. On posera $\Delta l = \sqrt{\Delta d^2 + a^2}$.
- 37) On note σ la conductivité électrique du mercure. Définir l'épaisseur de peau δ dans un conducteur, et en proposer un ordre de grandeur. Comparer δ à a .
(On rappelle la perméabilité magnétique du vide, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ USI).
- 38) On modélise le courant induit par la bobine dans le mercure par une boucle de courant de rayon a . On rappelle que pour deux circuits filiformes \mathcal{C}_1 parcouru par un courant i_1 et \mathcal{C}_2 parcouru par un courant i_2 , l'inductance mutuelle M est définie par

$$\Phi_{12} = Mi_2, \quad \Phi_{21} = Mi_1, \quad (20)$$

où Φ_{12} est le flux envoyé par \mathcal{C}_2 à travers \mathcal{C}_1 , et respectivement Φ_{21} est le flux envoyé par \mathcal{C}_1 à travers \mathcal{C}_2 . Estimer l'inductance mutuelle entre la bobine et la distribution de courant induite dans le mercure, et préciser sa variation avec la distance Δd .

- 39) Le signal de sortie du capteur est une tension proportionnelle au décalage de fréquence causé par la présence d'une cible conductrice à proximité de la bobine. Dans une gamme de distance de 0 à 5 mm, ce décalage peut être ramené à zéro. Comment procéder pour que le capteur donne une réponse linéaire à la variation de distance entre le capteur et la surface libre du mercure due à l'onde de surface ?
- 40) Les ordres de grandeurs fournis dans l'Annexe B.1, ainsi que les amplitudes des ondes, permettent-ils d'espérer rester dans un domaine de réponse linéaire ?

III.3 Mesure de vitesse de phase

- 41) Avec quel type d'excitation électrique doit on alimenter l'émetteur d'ondes pour procéder à des mesures de vitesse de phase ?
- 42) Définir les notions de *champ proche* et *champ lointain* pour une onde. Expliquer pourquoi une mesure de vitesse de phase n'a de sens que si l'on est en champ lointain. Vérifier que tel est bien le cas pour les mesures commentées dans cette partie.
- 43) Les mesures de phase nécessitent l'emploi de deux capteurs \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 aux positions X_1 et X_2 , avec $X_1 < X_2$ si l'onde se propage dans le sens des x positifs. Les signaux issus des deux capteurs sont notés

$$\begin{cases} s_1(t) = s_0 \cos \omega t \\ s_2(t) = s_0 \cos(\omega t - \phi) \end{cases} \quad (21)$$

Donner l'expression de ϕ en fonction de la fréquence de l'onde $f = \omega/(2\pi)$, de c_ϕ , X_1 et X_2 .

- 44) On représente dans la Figure 3 les signaux issus des deux capteurs sur un écran d'oscilloscope à une fréquence f donnée. Identifier les deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$. Indiquer comment mesurer un déphasage $\tilde{\phi}$ entre ces deux signaux.

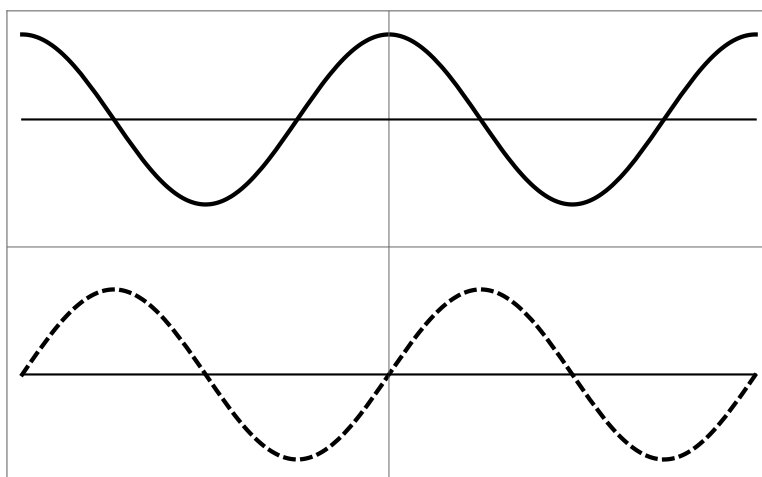


FIGURE 3 – Visualisation des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sur un écran d'oscilloscope. L'origine des temps est au centre de l'écran.

- 45) La phase $\phi(f)$ est différente de la phase mesurée $\tilde{\phi}$. En effet, la valeur de cette dernière est mesurée modulo 2π . Il faut corriger les discontinuités de 2π qui figurent dans les mesures brutes, de sorte que la courbe $\phi(f)$ soit monotone. Dans le texte de l'annexe B.2, les auteurs rappellent la nécessité de ce traitement des données, qui est appelé *dérouler* la phase (en Anglais, *unwrapping*).
- Combien de fois doivent-ils faire ce traitement de données pour tracer une des courbes de la figure 6, en suivant leur protocole de mesure ?
- 46) Combien de fois la phase entre les deux capteurs varie-t-elle de 2π pour une fréquence de 5 Hz et pour une fréquence de 25 Hz dans chacune des configurations de la Fig. 6 ?
- 47) Commenter la valeur trouvée expérimentalement pour la tension de surface air–mercure pour ajuster les données expérimentales de la Fig. 6 à la courbe théorique Eqn. (10).
- 48) Expliciter la relation entre la vitesse de phase $c_\phi(\lambda)$ et la longueur d'onde $\lambda(f)$ à la fréquence f . Expliquer comment l'utilisation d'un stroboscope peut donner un accès direct à la longueur d'onde $\lambda(f)$.

IV Couplage entre effets dispersifs et effets non-linéaires.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'influence conjointe de la dispersion et des effets non-linéaires. Si $A(x, t)$ est l'élévation de la surface libre par rapport à sa position d'équilibre $z = 0$, elle obéit à l'équation de Korteweg–de Vries (KdV),

$$\frac{\partial A}{\partial t} + c_s \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{3}{2} \frac{c_s}{h} A \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{6} c_s h^2 (1 - 3Bo) \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} = 0, \quad (22)$$

où on a introduit $c_s \equiv \sqrt{gh}$ et le *nombre de Bond* $Bo \equiv \gamma/(\rho gh^2)$.

On notera que la dérivée temporelle est du premier ordre. En conséquence, l'équation de KdV décrit la propagation d'ondes dans le seul sens $x > 0$, et seules des ondes se propageant dans ce sens seront désormais considérées.

L'équation de KdV peut être établie par un développement systématique à grande longueur d'onde et faible amplitude des équations d'Euler et des conditions aux limites à l'interface, mais nous nous contenterons d'arguments de plausibilité pour justifier son emploi dans le cadre des ondes à la surface libre d'un fluide.

IV.1 Ondes de surface et équation de Korteweg–de Vries

- 49) Vérifier que le *nombre de Bond* Bo est sans dimension. Exprimer la relation de dispersion $\omega(k)$ [voir Eqn. (10)] en fonction de g , k , h et Bo .
- 50) On se place dans la limite de faible épaisseur, $kh \ll 1$. Développer la relation de dispersion à l'ordre 2 en kh . Le résultat sera exprimé en fonction de c_s , k , h et Bo . On rappelle :

$$th\epsilon = \epsilon - \frac{\epsilon^3}{3} + O(\epsilon^5) \quad \text{pour} \quad |\epsilon| < 1, \quad \sqrt{1 + \epsilon} = 1 + \frac{\epsilon}{2} + O(\epsilon^2). \quad (23)$$

- 51) Réécrire l'équation de KdV (22) sans le terme non linéaire. Etablir la relation de dispersion pour une onde monochromatique $A(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t)$, et discuter sa compatibilité avec celle des ondes à la surface libre d'un fluide.
- 52) Montrer que dans la limite $kh \rightarrow 0$ la propagation de l'onde n'est plus dispersive, et exprimer la vitesse de propagation en fonction de g et h .
Si l'élévation de la surface libre n'est pas négligeable, l'épaisseur de la couche de fluide devient localement $h + A(x, t)$. Estimer la correction à apporter à la vitesse de propagation de l'onde, notée c , au premier ordre dans la petite quantité $|A(x, t)|/h$.
- 53) La vitesse de phase est la vitesse de l'onde dans un référentiel où le fluide est au repos. Si l'on prend en compte les effets non linéaires, il faut prendre en compte la vitesse d'écoulement du fluide, qui vient corriger le résultat précédent. L'amplitude de l'onde était notée $\eta(x, t)$ dans la première partie, ce qui donne comme ordre de grandeur $\eta(x, t) \sim A(x, t)$.
Déduire de l'équation (6) l'ordre de grandeur de la vitesse verticale v_z du fluide en surface.
Déduire de la condition à la limite en $z = -h$ un ordre de grandeur pour le terme dominant de $\partial v_z / \partial z$.
Utiliser l'incompressibilité de l'écoulement pour estimer l'ordre de grandeur du terme dominant de $\partial v_x / \partial x$, puis celui de la vitesse horizontale v_x à la surface. En déduire la correction à apporter à c , en fonction de c_s , A et h .
- 54) Réécrire l'équation de KdV (22) sans le terme dispersif. Conclure sur la validité de l'équation de KdV pour décrire les ondes faiblement dispersives ($k \rightarrow 0$) et faiblement non-linéaires ($|A(x, t)| \ll h$) à la surface libre d'un fluide.

IV.2 Intermède : un peu de mécanique du point matériel

On considère une particule ponctuelle de masse m , astreinte à se déplacer selon l'axe Ox d'un référentiel galiléen. La seule force à laquelle soit soumise la particule dérive d'une énergie potentielle $U(x)$,

$$U(x) = \frac{\alpha}{6}x^3 - \frac{\beta}{2}x^2, \quad (24)$$

où α et β sont des constantes réelles strictement positives.

- 55) Obtenir l'équation du mouvement de la particule.
- 56) Calculer les positions d'équilibre de la particule en fonction de α et β et préciser leur stabilité.
- 57) Représenter l'énergie potentielle $U(x)$ en fonction de x . On notera U^* l'énergie potentielle correspondant à la position d'équilibre stable x^* , et on l'exprimera en fonction de α et β .
- 58) Justifiez la conservation de l'énergie mécanique de la particule, notée E , et précisez son expression. On suppose $U^* < E < 0$, montrer graphiquement que la particule peut être animée d'un mouvement périodique entre deux positions x_1 et x_2 , avec $0 < x_1 \leq x \leq x_2$, et placer E , x_1 et x_2 sur le graphe précédent (Il est inutile d'explicitier x_1 et x_2). Exprimer la période d'oscillation $T(E)$ comme une intégrale entre x_1 et x_2 (on ne demande pas de la calculer).
- 59) Calculer la période T^* des petites oscillations autour de x^* . Qu'appelle-t-on *l'isochronisme des petites oscillations* ?
- 60) On suppose $E = 0$. Expliciter x_1 et x_2 dans cette limite, en fonction de α et β . Montrer que la période d'oscillation T tend vers l'infini dans la limite $E \rightarrow 0$. Représenter schématiquement la période d'oscillation $T(x_2 - x_1)$ en fonction de l'amplitude des oscillations $x_2 - x_1$, pour $U^* \leq E \leq 0$.
- 61) On a représenté dans la Figure 4 trois représentations graphiques de la position $x(t)$ en fonction du temps t , pour des énergies E telle que $U^* < E \leq 0$. Classifier ces figures par valeur de E croissante, en justifiant votre réponse. Préciser pour la courbe de droite l'énergie E , la valeur minimale de $x(t)$ et sa valeur maximale.

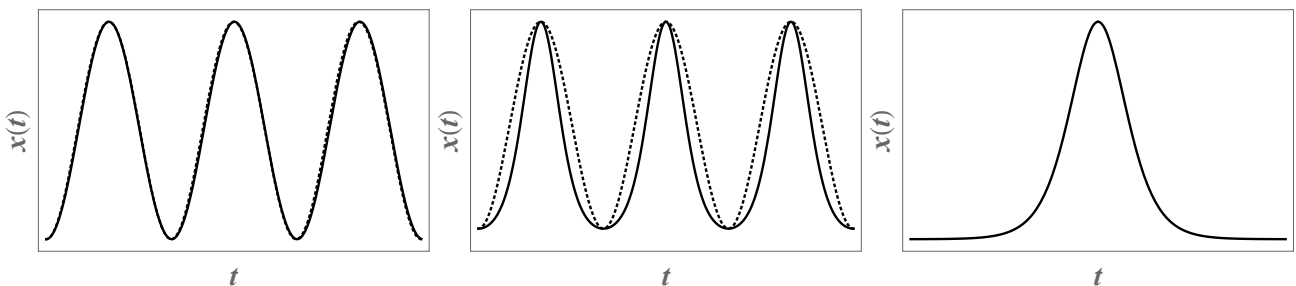


FIGURE 4 – En traits pleins : solution exacte $x(t)$ pour une particule d'énergie mécanique E en fonction du temps t , pour $U^* < E \leq 0$. En traits pointillés : Sinusoïde de même amplitude et de même période que la solution exacte. À droite la solution n'est pas périodique.

- 62) Faire un portrait de phase de l'oscillateur dans le plan (x, \dot{x}) où $\dot{x} \equiv dx/dt$. On tracera la position d'équilibre d'énergie U^* , une trajectoire périodique, la trajectoire d'énergie mécanique $E = 0$, et une trajectoire d'énergie $E > 0$. Dans le plan de phase, la trajectoire d'énergie mécanique $E = 0$ est appelée séparatrice. Pourquoi ?

IV.3 L'onde solitaire de Korteweg–de Vries

- 63) Dans la Fig. 5, nous représentons l'élévation de la surface libre $A(x, t = 0)$ à un instant initial $t = 0$.

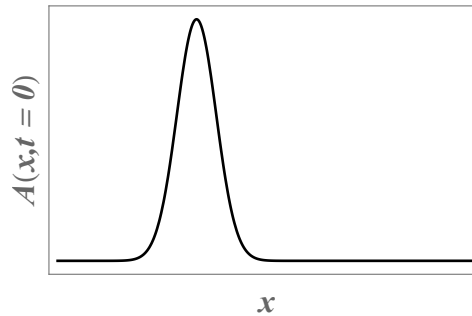


FIGURE 5 – Représentation schématique d'une onde $A(x, t) \geq 0$ se propageant selon l'axe Ox , de la gauche vers la droite, dans un milieu non linéaire. Le profil de l'onde est dessiné à l'instant initial $t = 0$.

Identifier le terme dispersif de l'équation de KdV (22). Illustrer sur un schéma l'évolution du profil de la Fig. 5 sous l'effet de la dispersion, pour $t > 0$.

- 64) On suppose maintenant que le terme dispersif de l'équation de KdV est absent. Exprimer alors la vitesse de l'onde c en fonction de c_s , A et h . Montrer sur un schéma comment évolue la forme d'onde de la Fig. 5 pour $t > 0$.
- 65) Notons A_0 l'amplitude maximale de l'onde, L sa largeur spatiale typique. Expliciter la relation entre A_0 , L et h pour que les effets dispersifs et les effets non-linéaires sur la vitesse de propagation de l'onde se compensent.
- 66) Il est donc raisonnable d'espérer trouver des solutions de type *onde solitaire* de l'équation de KdV. Il s'agit d'ondes non-linéaires se propageant sans déformation à vitesse constante c . On cherche donc des ondes telles que $A(x, t) = A(\chi)$ avec $\chi \equiv x - ct$, solution de l'équation (22). Ecrire l'équation différentielle du troisième ordre vérifiée par la fonction $A(\chi)$. On pourra noter $A' \equiv dA/d\chi$.
- 67) On cherche une onde localisée, c'est-à-dire telle que $A(\chi \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$, comme pour le profil de la Fig. 5. Intégrer une première fois l'équation différentielle précédente.
- 68) On suppose $Bo < 1/3$. Intégrer une seconde fois cette équation, et montrer que l'on peut écrire

$$m \left(\frac{dA}{d\chi} \right)^2 = \beta A^2 - \frac{\alpha}{3} A^3 + 2E, \quad (25)$$

où $m = c_s h^2 (1 - 3Bo)/6$, où α et β sont des constantes réelles que l'on exprimera en fonction de c_s , c et h , et où $2E$ est une constante d'intégration. On suppose $\beta > 0$, en déduire une inégalité entre les vitesses c et c_s .

- 69) Établir une analogie avec le problème précédent de Mécanique du Point. Dans un tableau, on portera systématiquement les quantités mécaniques et les quantités analogues se référant à l'onde solitaire. On précisera en particulier l'analogie mécanique de la constante d'intégration E .

- 70) Montrer que, pour une valeur de la constante E que l'on précisera, l'équation (25) admet la solution [on rappelle que $(\forall x \in \mathbb{R}), \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$]

$$A(\chi) = \frac{3\beta}{\alpha} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \left[\left(\frac{\beta}{m} \right)^{1/2} \frac{\chi}{2} \right]}. \quad (26)$$

Représenter graphiquement cette fonction. Vous paraît-elle une représentation acceptable d'une onde solitaire ?

- 71) Exprimer l'amplitude maximale de l'onde solitaire, A_0 , en fonction de α et β , et vérifier $A_0 > 0$ (onde solitaire d'élévation). Exprimer la vitesse c en fonction de c_s , A_0 et h . Vérifier que cette expression est cohérente avec l'inégalité $\beta > 0$.
- 72) À partir de l'expression de $A(\chi)$, estimer l'extension spatiale caractéristique L de l'onde solitaire. Quel résultat retrouve-t-on pour l'ordre de grandeur de L ?
- 73) On suppose maintenant $Bo > 1/3$. Il reste possible d'utiliser une analogie mécanique, en prenant garde que le paramètre équivalent à la masse soit positif. Reprendre l'analyse précédente en effectuant les modifications appropriées. Montrer qu'il existe une onde solitaire avec $A_0 < 0$ (onde de déplétion).
- 74) On définit le *nombre de Froude* $Fr \equiv c/c_s$. Préciser pour chacune des ondes solitaires précédentes, dans les cas $Bo < 1/3$ puis $Bo > 1/3$, l'inégalité vérifiée par le nombre de Froude.

IV.4 Ondes solitaires de déplétion et d'élévation

- 75) Une première observation d'ondes solitaires est donnée dans la Fig. 7. Calculer le nombre de Bond Bo dans chaque cas et vérifier que cette valeur est cohérente avec l'analyse précédente. On rappelle $g = 9.81$ USI.
- 76) Les auteurs de l'étude expérimentale détaillée dans les Annexes insistent sur le fait qu'il n'utilisent aucun paramètre libre pour la comparaison entre leurs mesures expérimentales et la formule théorique (26). Expliquez pourquoi.
- 77) Déduire de l'amplitude des ondes solitaires de la Fig. 7 leur vitesse de propagation, et estimez l'extension spatiale de ces ondes. Comment se compare-t-elle à la distance sur laquelle elles se sont propagées ?
- 78) La forme des ondes solitaires de déplétion en fonction de leur distance à l'émetteur est représentée dans la Fig. 8. Pourquoi la comparaison entre théorie et expérience est-elle moins bonne pour la toute première ? Expliquer la construction de la figure présentée en insert.
- 79) La vitesse adimensionnée c/\sqrt{gh} est représentée en fonction de A_0/h pour plusieurs ondes solitaires dans la Fig. 9. Comparer ces résultats expérimentaux aux prédictions théoriques de la partie IV.3. Commentez les valeurs expérimentales des nombres de Bond, la répartition des points de mesure par rapport à la valeur $c/\sqrt{gh} = 1$, et enfin la pente de la droite en traits pleins représentée sur la figure.

IV.5 Effets dissipatifs

Aucun effet dissipatif n'a été pris en compte jusqu'à présent. Il est néanmoins possible de les observer, comme le prouvent les mesures présentées dans la Fig. 10.

- 80) Quelle figure parmi celles étudiées à la question précédente mettait en évidence une atténuation des ondes solitaires ?
- 81) L'équation de KdV ne comporte aucun terme dissipatif. Comment expliquer qu'elle rende aussi bien compte de la forme des ondes solitaires observées expérimentalement ?
- 82) A l'aide des données de la Fig. 10, proposer une définition de la longueur d'atténuation $\zeta(h)$. Le symbole \bullet correspond à $h_0 = 2.12$ mm. Estimer $\zeta(h_0)$ à partir de la Figure 8 et vérifier la cohérence avec les résultats de la Figure 10.
- 83) Les ondes solitaires de déplétion se comportent-elles différemment des ondes solitaires d'élévation en ce qui concerne leur atténuation ? Quel est le résultat expérimental sur la dépendance de $\zeta(h)$ en fonction de h ?

ANNEXES

A Valeurs numériques

TABLE 1 – Les valeurs numériques ci-dessous sont toutes exprimées en unités du système international, et valables à une température de 20°C pour un corps pur. Les symboles utilisés sont les mêmes que dans le corps du texte.

Symbole	Grandeur physique	Eau	Mercure
ρ	Masse volumique	1×10^3	$13,6 \times 10^3$
γ	Tension de surface liquide/air	0,073	0,484
μ	Viscosité dynamique	10^{-3}	$1,5 \times 10^{-3}$
σ	Conductivité électrique	$5,5 \times 10^{-6}$	$1,04 \times 10^6$
–	Vitesse du son	1480	1407

B Extraits d'article scientifique

[Extrait de E. Falcon, C. Laroche, S. Fauve, **Observation of depression solitary surface waves on a thin fluid layer**, Physical Review Letters, volume 89, 204501 (2002). De cette référence sont extraites les Figures de l'annexe C. Les notations de l'article original sont par ailleurs adaptées à celles de l'énoncé.]

B.1 Descriptions du dispositif expérimental

Le dispositif expérimental consiste en un long canal horizontal en plexiglas d'une longueur de 1,5 m, large de 7 cm, rempli de mercure jusqu'à une hauteur h , avec $2,12 \leq h \leq 8,50$ mm. h

est mesurée avec une précision de $\pm 0,02$ mm au moyen d'une jauge de profondeur utilisant un positionneur linéaire micrométrique.

...

Les ondes de surfaces sont engendrées par une excitation soit sinusoïdale soit impulsionnelle fournie par le mouvement horizontal d'une plaque rectangulaire en Teflon pilotée par un vibreur électromagnétique. Elles sont créées 10 mm à l'avant d'une des extrémités du canal et le déplacement local du fluide en réponse à cette excitation est mesuré par deux capteurs inductifs non intrusif. Chaque capteur inductif, d'un diamètre de 3 mm, est suspendu perpendiculairement à la surface du fluide au repos. Ils sont placés 2,5 mm au dessus de la surface lors de l'étude des ondes solitaires d'élévation, et 0,5 mm au dessus de la surface lors de l'étude des ondes solitaires de déplétion. L'étendue de la zone de réponse linéaire du capteur permet la mesure d'une distance entre la tête du capteur et la surface du fluide jusqu'à 2,5 mm avec une sensibilité de 5 V/mm. Le premier capteur est placé à 100 mm de l'émetteur, et le second est monté sur un positionneur linéaire horizontal à une distance x du premier, $0 < x < 1,2$ m. Bien que les capteurs inductifs soient largement utilisés pour obtenir une mesure précise de la position d'une plaque métallique mobile, leur réponse dans le cas d'une onde à la surface d'un liquide n'était pas connue. Nous avons donc vérifié nos mesures avec une détermination optique de la pente locale de la surface : Avec un détecteur de position, nous avons enregistré la déflexion d'un rayon laser par l'onde de surface ; le calcul de l'élévation de la surface à partir du signal optique est en excellent accord avec la mesure inductive directe de la forme de l'onde. Les méthodes inductives et optiques sont complémentaires en ce sens que la résolution spatiale et la sensibilité de la méthode optique sont meilleures, mais la méthode inductive procure une mesure directe du déplacement de la surface et ne nécessite pas de traitement du signal. Outre la simplicité, cela permet une mesure plus précise de formes d'ondes complexes car de petites erreurs peuvent se cumuler suite à l'intégration numérique nécessaire au traitement du signal optique. Les deux méthodes ne sont pas limitées par leur temps de réponse dans la gamme de fréquence des ondes de surface. Le choix du mercure a été motivé par la possibilité offerte de la technique inductive de mesure, et aussi parce que sa viscosité cinématique est d'un ordre de grandeur plus faible que celle de l'eau, réduisant donc fortement la dissipation des ondes.

B.2 Mesure de la vitesse de phase

Nous mesurons la vitesse de phase et déterminons la relation de dispersion des ondes gravito-capillaires afin de valider notre technique de mesure et de mesurer la valeur de la tension de surface γ . À cette fin, le vibreur est excité sinusoïdalement à petite amplitude, à une fréquence f variant entre 5 et 25 Hz avec des pas de 0,1 Hz. Nous mesurons la différence de phase relative ϕ entre les signaux fournis par les deux capteurs à l'aide d'une détection synchrone (*lock-in amplifier*) en fonction de la fréquence f . La vitesse de phase c_ϕ est alors obtenue à partir de la phase déroulée (*unwrapped*) $\phi(f)$ et de la distance $x = 120$ mm entre les deux capteurs. [...] Les données sont en bon accord avec la relation de dispersion obtenue en négligeant la viscosité, Eqn. (10) entre la pulsation $\omega = 2\pi f$ et le nombre d'onde k à condition de prendre $\gamma = 0,4$ USI. Il faut noter que cette valeur est inférieure d'environ 17% à la valeur tabulée pour le mercure. [...] Une vérification indépendante de la formule (10) est montrée dans l'insert de la Fig. 6. La longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$, obtenue en fonction de f par la méthode précédente, est comparée à sa mesure directe réalisée à l'aide d'un stroboscope.

C Résultats expérimentaux

[Figures extraites de E. Falcon, C. Laroche, S. Fauve, **Observation of depression solitary surface waves on a thin fluid layer**, Physical Review Letters, volume 89, 204501 (2002).]

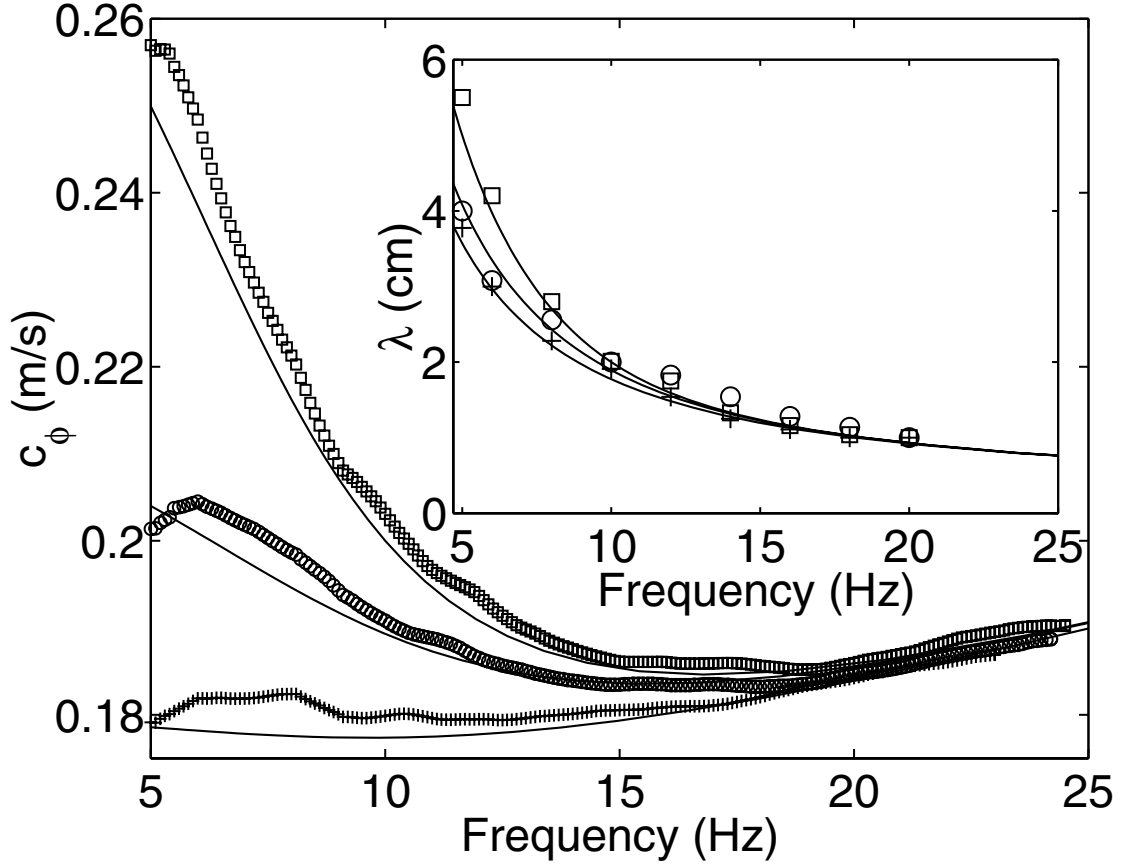


FIGURE 6 – Vitesse de phase (m/s) en fonction de la fréquence f pour une profondeur $h = 3.3$ (+), 4.6 (o) et 8 (□) mm. Les lignes continues représentent $\omega(k)/k$ obtenue à partir de l'Eqn. (10) pour $\gamma = 0.4$ USI et $h = 3.3$ (courbe du bas), 4.6 (milieu) et 8 (haut) mm. Dans l'insert on montre la longueur d'onde en fonction de la fréquence obtenue par des mesures additionnelles avec un stroboscope (mêmes symboles que précédemment).

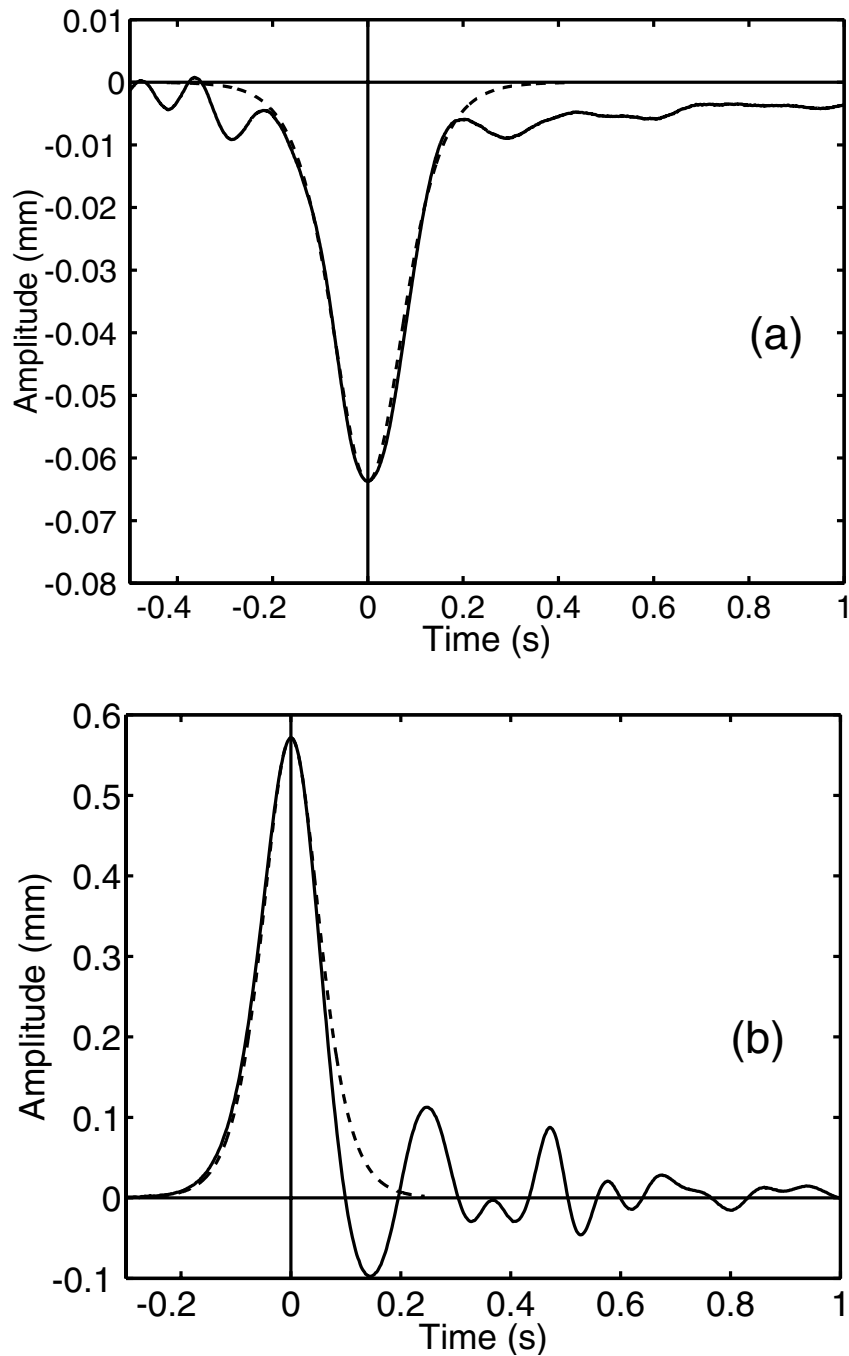


FIGURE 7 – (a) Profil d’une onde solitaire de déplétion pour $h = 2,12$ mm et $A_0 = -0,064$ mm ; (b) profil d’une onde solitaire d’élévation pour $h = 5,60$ mm et $A_0 = 0,570$ mm. Les courbes en traits pleins sont l’enregistrement temporel du déplacement de la surface du fluide mesuré par un capteur situé à 300 mm (a) et 200 mm (b) de l’émetteur d’onde. Les lignes pointillées sont les solutions théoriques (26) correspondant à chaque cas.

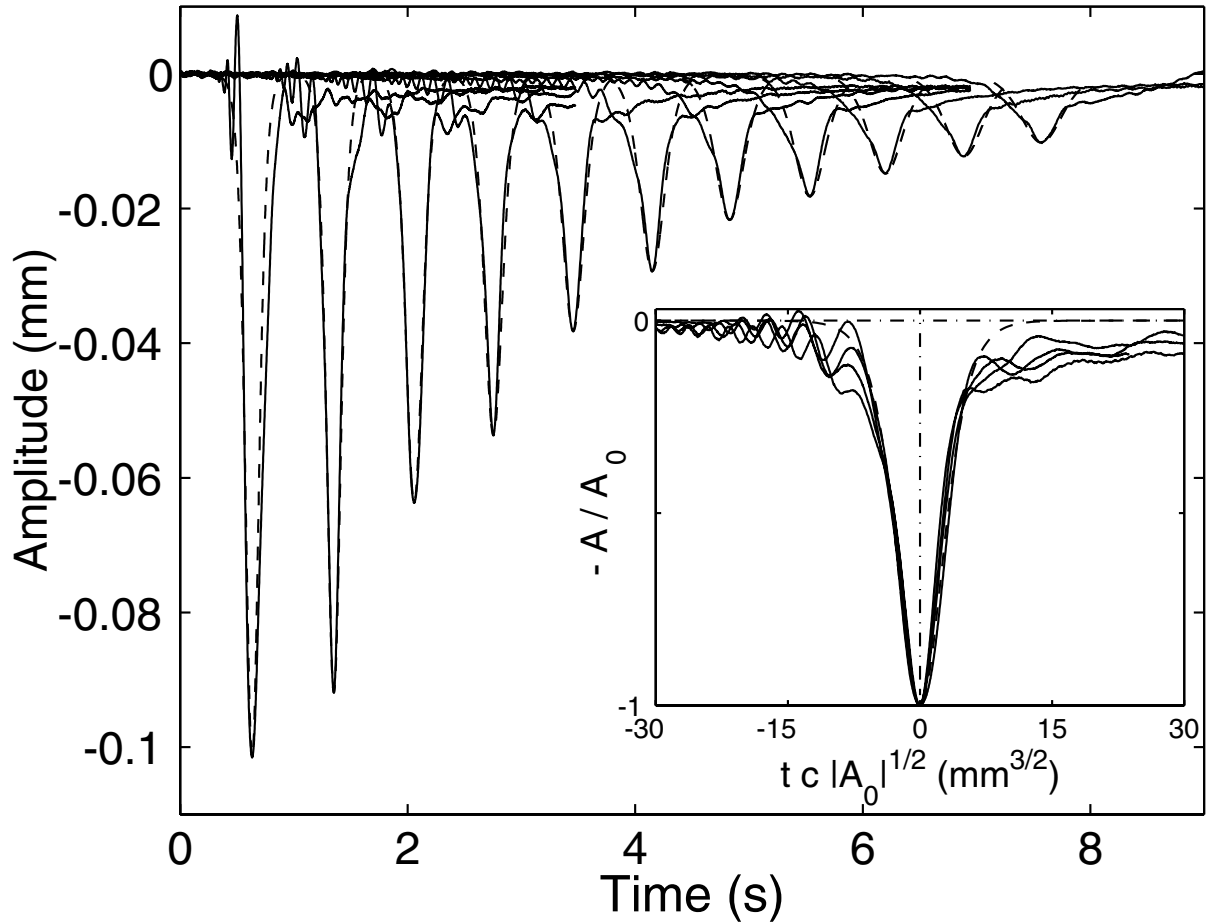


FIGURE 8 – Propagation d’une onde solitaire de déplétion pour $h = 2, 12$ mm, enregistrée à des distances de l’émetteur allant de 100 mm à 1100 mm par pas de 100 mm. L’origine des temps est définie par l’émetteur. Les lignes pointillées sont les solutions théoriques (26) correspondant à chaque cas. L’insert montre les ondes solitaires de déplétion aux distances 200, 300, 400 et 500 mm, en variables d’échelle $-A/A_0$ et $tc|A_0|^{1/2}$.

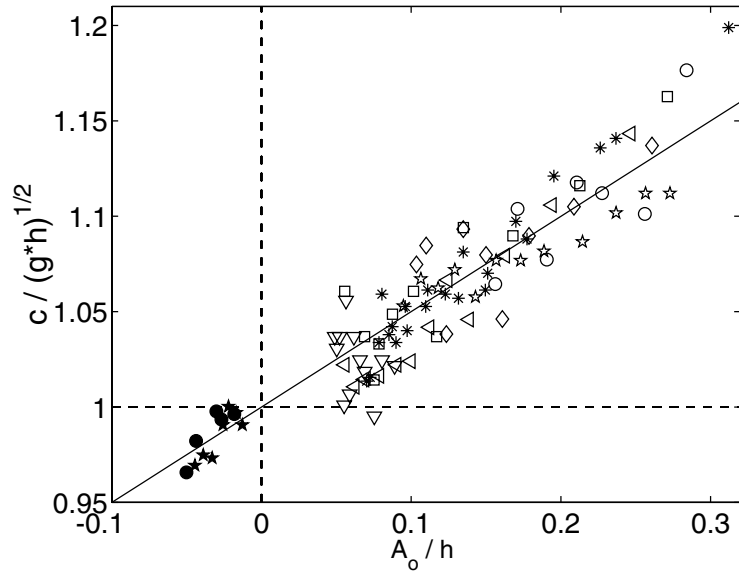


FIGURE 9 – Vitesse adimensionnée c/\sqrt{gh} en fonction de A_0/h pour plusieurs paramètres expérimentaux : ondes solitaires de déplétion, $h = 2, 12$ (●) et $2, 72$ mm (★). Les autres symboles correspondent à des ondes d’élévation, $3, 30 \leq h \leq 8, 50$ mm. La droite en traits pleins a une pente de $0, 5$.

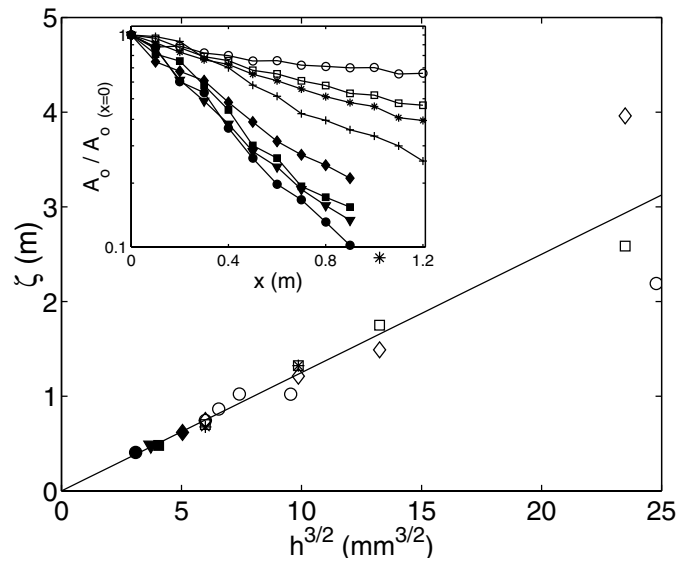


FIGURE 10 – Les symboles pleins correspondent à des ondes solitaires de déplétion, les symboles ouverts à des ondes solitaires d’élévation. En insert est tracé $A_0(x)/A_0(x=0)$ (échelle logarithmique décimale) en fonction de x (en m., échelle linéaire). Les lignes joignent juste les points expérimentaux. Dans la courbe principale on trace, en échelles linéaires, la longueur d’atténuation $\zeta(h)$ (m) en fonction de $h^{3/2}$ ($\text{mm}^{3/2}$).