

SESSION 2021

**AGREGATION
CONCOURS EXTERNE**

Section : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR

**Option : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR
ET INGÉNIERIE DES CONSTRUCTIONS**

**MODÉLISATION D'UN SYSTÈME, D'UN PROCÉDÉ
OU D'UNE ORGANISATION**

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1416A	102	2680

Le sujet proposé porte sur la **réalisation d'un réseau de chaleur à Sathonay (69)**.

Il comporte **21 pages** et se décompose en **5 parties** :

PARTIE 1 – Etude de la combustion du bois.....	6
PARTIE 2 – Etude de l'évacuation des fumées.....	10
PARTIE 3 – Etude du réseau de distribution primaire.....	13
PARTIE 4 – Étude d'un voile enterré du local vériers.....	16
PARTIE 5 – Étude mécanique d'une poutre continue du rez-de-chaussée.....	21

Toutes les parties peuvent être traitées de manière indépendante. Pour chaque question, en complément des résultats de calculs proprement dits, il conviendra de justifier les choix effectués, les éventuelles hypothèses retenues et les calculs réalisés, et de commenter les résultats obtenus.

REALISATION D'UN RESEAU DE CHALEUR

Un réseau de chaleur ou réseau de chauffage urbain est un système de distribution de chaleur produite de façon centralisée, permettant de desservir plusieurs usagers. Il comprend généralement une unité de production de chaleur, un réseau de distribution primaire dans lequel la chaleur est transportée par un fluide caloporteur, et un ensemble de sous-stations d'échange, à partir desquelles les bâtiments sont alimentés par un réseau de distribution secondaire.

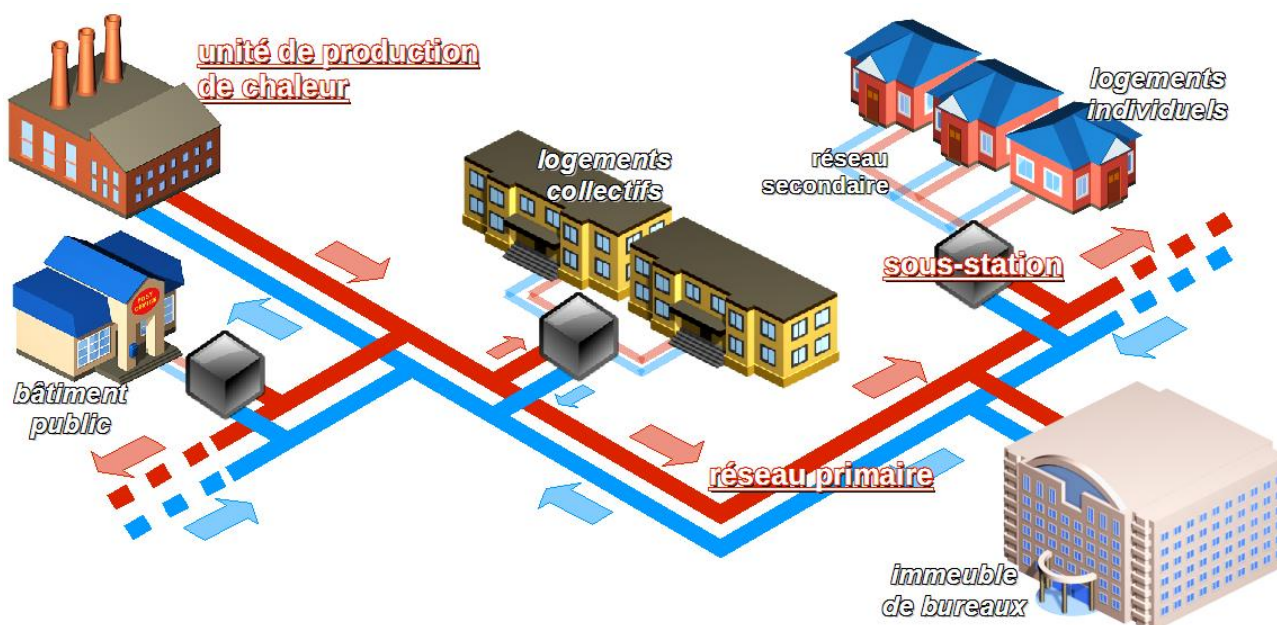


Figure 1 : Schéma de principe d'un réseau de chaleur

Tout réseau de chaleur comporte les principaux éléments suivants :

- L'unité de production de chaleur qui peut être une usine d'incinération d'ordures ménagères, une chaufferie alimentée par un combustible (bois, gaz...), etc. Généralement un réseau comporte un générateur principal qui fonctionne en continu et une unité d'appoint utilisée en renfort pendant les heures de pointe, ou en remplacement lorsque cela est nécessaire.
- Le réseau de distribution primaire composé de canalisations dans lesquelles la chaleur est transportée par un fluide caloporteur. La conception du réseau vise à assurer une densité thermique (nombre de bâtiments raccordés par kilomètre de conduite posée) aussi élevée que possible, afin de permettre la viabilité économique du réseau (coût d'investissement fortement liée au linéaire de conduite ; recettes liées au nombre d'usagers).
- Les sous-stations d'échange, situées en pied d'immeuble, permettent le comptage et le transfert de chaleur par le biais d'un échangeur à puissance régulée entre le réseau de distribution primaire et le réseau secondaire qui alimente un immeuble ou un petit groupe d'immeubles. Celui-ci ne fait pas partie du réseau de chaleur au sens juridique, car il n'est pas géré par le responsable du réseau de chaleur mais par le responsable de l'immeuble.

La nécessité économique, sociale et environnementale de limiter notre dépendance aux énergies non renouvelables et de réduire nos émissions de gaz à effet de serre suscite depuis plusieurs années un important regain d'intérêt pour les réseaux de chaleur à travers le développement de réseaux dits vertueux (utilisant au moins 50% d'énergie renouvelable). En effet, ces réseaux permettent de mobiliser d'importants gisements d'énergie renouvelable difficiles d'accès ou d'exploitation, notamment en zones urbaines (bois-énergie, chaleur de récupération...).

Leur implantation étant intimement liée aux problématiques d'urbanisme, d'aménagement et de construction, seules les collectivités territoriales disposent de moyens d'action pour les développer sur leur territoire. Afin de contribuer aux objectifs nationaux de la transition énergétique, il est indéniable que ces réseaux soient fortement développés, modernisés, étendus et densifiés au cours des prochaines années.

Le réseau de chaleur de Sathonay alimente actuellement 1500 équivalents-logements (chiffres 2020) : pôle régional de gendarmerie, bâtiments communaux, résidences de bailleurs sociaux, copropriétés. La production de chaleur est assurée par une cascade de deux chaudières bois de puissance cumulée 3,5 MW (2,7 MW et 0,8 MW). Deux chaudières gaz d'appoint et de sécurité complètent la chaufferie. Le mix énergétique réel fait état d'un taux de couverture annuel moyen de 75% *EnR&R* (énergie renouvelable et récupération). Le réseau de distribution ramifié, de longueur 5,5 km, couvre une zone urbaine de 90 hectares.



Figure 2 : Chaufferie et réseau de distribution de Sathonay

Concernant la construction, l'ouvrage abritant cette installation de production est une structure classique construite en béton armé, constituée de voiles, poteaux et poutres. Le bâtiment comporte plusieurs parties. L'élément le plus haut, abritant les chaudières, s'élève à 8,90 mètres (niveau acrotère) par rapport au niveau fini. Une partie de l'installation est en sous-sol, dont les silos de stockage et un local vérins (niveau - 4,00 mètres sous le terrain naturel).

PARTIE 1 – Etude de la combustion du bois

(4 points)

L'objectif de cette partie est d'évaluer le débit nominal de fumée de la chaudière bois principale (2,7 MW) et de montrer l'intérêt d'une récupération d'énergie sur les fumées.

Le site d'implantation de la chaufferie est approvisionné en biomasse d'origine sylvicole sous forme d'écorces brutes, de déchets verts ligneux et de plaquettes forestières déchetées.

Le combustible de référence a les caractéristiques suivantes :

- Masse volumique apparente moyenne 320 kg/m³
- Pourcentage d'humidité sur masse brute 35 %

La quantité d'eau présente dans le bois pénalise son pouvoir calorifique massique : non seulement elle réduit d'autant la quantité de bois anhydre (sec) par kilogramme de combustible, mais de plus elle absorbe une partie de l'énergie de réaction pour s'évaporer durant la première phase de la combustion (séchage-pyrolyse-oxydation). Ainsi le pouvoir calorifique (inférieur) du bois humide se déduit de celui du bois anhydre par :

$$PCI_{hum} = \left(\frac{100 - H}{100} \right) \times PCI_{anh} - \frac{H}{100} \times L_v$$

où : $PCI_{anh} = 18$ MJ/kg

H est le pourcentage d'humidité sur masse brute

L_v est la chaleur latente d'évaporation de l'eau : 2,5 MJ/kg

Question 1 :

Déterminer le PCI du combustible de référence en [MJ/kg] et [kWh/kg].

En déduire la perte d'énergie calorifique par rapport au bois anhydre en [%].

Quelle est la conséquence du point de vue logistique pour la chaufferie ? **Est-il envisageable** de réduire la teneur en humidité *in situ* pour « enrichir » le combustible ?

La puissance totale utile (ou fournie) des chaudières bois a été dimensionnée à 3,5 MW. Aux conditions nominales de fonctionnement (pleine charge et régime de température 105/75), leur rendement est 85%/PCI.

Question 2 :

Lister les sources de pertes d'énergie des chaudières par ordre d'importance.

Calculer le débit nominal de consommation de bois q_m en [tonne/h].

Le programme des travaux impose une capacité de stockage équivalente à quatre jours de fonctionnement à pleine charge. **Evaluer** le volume de stockage à prévoir en [m³].

La composition moyenne en masse du bois anhydre est :

- Carbone C 50%

- Hydrogène H 6%
- Oxygène O 44%
- Azote N <1% (négligeable)

Afin d'étudier la combustion du bois anhydre, il est nécessaire de définir sa composition chimique exprimée sous la forme CH_xO_y .

Question 3 :

Montrer que les proportions atomiques de l'hydrogène et de l'oxygène dans la molécule représentative du bois sont respectivement $x = 1,44$ et $y = 0,66$. **Préciser** la masse molaire du bois anhydre.

On rappelle les masses molaires ou atomiques utiles :

C : 12 g/mol H : 1 g/mol O : 16 g/mol

Question 4 :

Ecrire et équilibrer l'équation de combustion stœchiométrique (ou complète) d'une unité molaire de bois anhydre.

En déduire aux conditions normales N de température et de pression :

- Le volume d'air nécessaire à la combustion d'un kilogramme de bois anhydre $V_{a\ ba}$ [Nm^3/kg],
- Le volume de fumées sèches produit par la combustion d'un kilogramme de bois anhydre $V_{fs\ ba}$ [Nm^3/kg],
- La masse d'eau présente dans les fumées $m_{\text{eau}\ ba}$ [kg/kg]

En extrapolant les résultats obtenus au bois humide de référence, **montrer** que :

- $V_{a\ bh} = 3 \text{ Nm}^3/\text{kg}$,
- $V_{fs\ bh} = 2,96 \text{ Nm}^3/\text{kg}$,
- $m_{\text{eau}\ bh} = 0,7 \text{ kg}/\text{kg}$

On rappelle :

- Les conditions normales de température et de pression ou CNTP correspondent à 0°C et p_{atm} . Dans ces conditions, une mole de gaz représente un volume de 22,4 litres.
- La composition volumique de l'air : 21% O_2 et 79% N_2

Focalisons-nous désormais sur la chaudière bois principale :

- $P_{\text{fournie ou utile}} = 2,7 \text{ MW}$ ($R = 85\%/PCI$)
- $P_{\text{conso}} = 3,18 \text{ MW}$
- $q_{m\ bh} = 1060 \text{ kg}/\text{h}$

On cherche à définir les conditions de combustion nominales au brûleur, à savoir :

- le débit volumique réel d'air nécessaire à $T_{\text{amb}} = 25^\circ\text{C}$,
- le débit volumique réel de fumées produites à $T_f = 200^\circ\text{C}$.

Le mélange combustible-air étant imparfait compte tenu notamment de la granulométrie du combustible et de la géométrie de la chambre de combustion, il est préconisé d'introduire un excès d'air suffisant pour réduire au maximum la production d'imbrulés dans les fumées (escarbilles, particules fines, CO, COV, ...).

Question 5 :

A partir des valeurs données en CNTP, **déterminer** en [m^3/kg] les volumes d'air $V_{a\ R}$ et de fumées humides $V_{fh\ R}$ correspondants à la combustion d'un kilogramme de bois humide de référence dans les conditions réelles de fonctionnement. **En déduire** les débits gazeux en entrée et sortie chaudière en [m^3/h].

On rappelle :

- Au voisinage de la pression atmosphérique, ce qui est avéré ici, les gaz réels se comportent comme des gaz parfaits : $p V = m r T$
(p : pression absolue [Pa], V : volume [m^3], m : masse [kg], r : constante massique, T : température [K])
- $T [K] = T [^{\circ}C] + 273,15$

On précise :

- Masse volumique de la vapeur d'eau à $200^{\circ}C$: $0,46 \text{ kg/m}^3$
- Excès d'air : 70%

En abaissant la température des fumées en dessous du point de rosée (environ $60^{\circ}C$) à l'aide d'un échangeur à eau basse température par exemple :

- Une part de la chaleur sensible des fumées sera transmise,
- la vapeur d'eau va se condenser et libérer sa chaleur latente.

Leur récupération offre un gain substantiel en énergie.

Placé en amont du système de dépoussiérage (cyclonage, électrofiltre, filtre à manche), le condenseur permet de surcroît un lavage partiel des fumées grâce aux noyaux de condensation créés. Les particules retenues sont ensuite récupérées sous forme de boues dans les condensats. Le procédé, s'il ne permet pas à s'affranchir des systèmes de filtration réglementaires, atténue leur sollicitation et allège *de facto* les interventions de maintenances en exploitation.

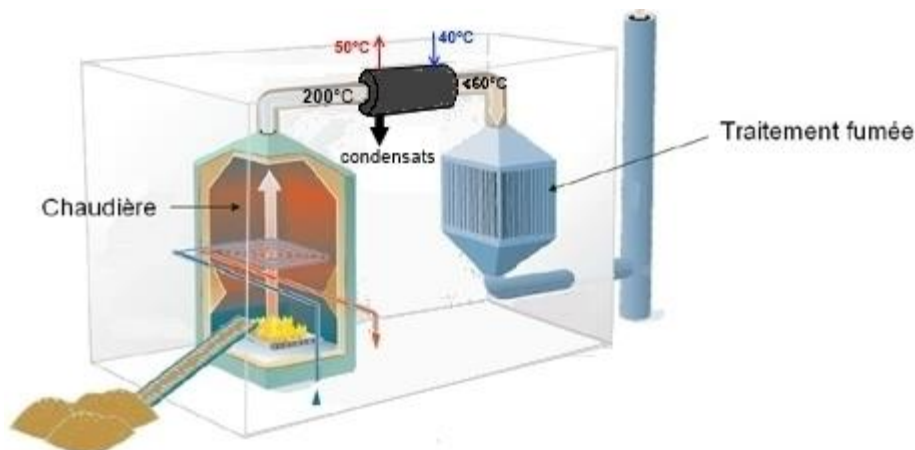


Figure 3 : Schéma de principe d'un récupérateur fumées

Question 6 :

Evaluer la puissance récupérable en [kW] si l'on équipe l'installation d'un condenseur d'efficacité 70%. **Préciser** le débit de condensat à évacuer en [l/h].

En déduire le gain sur le rendement global de la chaudière.

Quels contraintes ou inconvénients sont engendrés par l'installation de ce système ?

On précise :

- Débit des fumées à $200^{\circ}C$: $10900 \text{ m}^3/\text{h}$
- Masse volumique des fumées à $200^{\circ}C$: $0,7 \text{ kg/m}^3$
- Chaleur massique des fumées : $1 \text{ kJ/kg}^{\circ}C$
- Chaleur latente de la vapeur d'eau à $60^{\circ}C$: $0,65 \text{ kWh/kg}$

PARTIE 2 – Etude de l'évacuation des fumées

(3 points)

L'objectif de cette partie est de mettre en évidence les limites du tirage naturel pour une chaudière bois industrielle.

La forme généralisée du théorème de Bernoulli exprime la conservation de l'énergie mécanique en écoulement stationnaire entre deux points d'une ligne de courant.

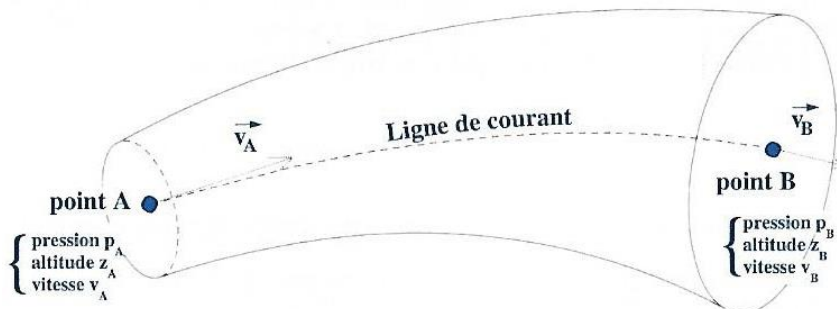


Figure 4 : veine de fluide à débit volumique constant

$$H_A + \Delta p = H_B + \Delta X$$

où H représente l'énergie mécanique locale en [Pa] :

$$H = p + \rho \times g \times z + \frac{1}{2} \times \rho \times v^2$$

avec p : pression statique [Pa]

ρ : masse volumique [kg/m^3]

g : $9,81 \text{ m/s}^2$

z : altitude [m]

v : vitesse [m/s]

Δp : apport de pression éventuel entre A et B (ventilateur) en [Pa]

ΔX : pertes de charge ou frottements entre A et B en [Pa]

Considérons un conduit vertical de section uniforme dans lequel on souhaite faire circuler un débit d'air ambiant.

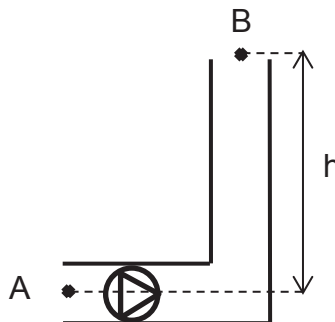


Figure 5 : circulation forcée en conduit

Question 7 :

Montrer que l'apport de pression du ventilateur Δp_v ne dépend pas de l'altitude en B.

Dans une chaudière pressurisée en fonctionnement, la pression dans le foyer est proche de la pression atmosphérique : une légère surpression permet juste de vaincre ΔX_{buse} , la perte de charge des fumées au passage de la buse de sortie en A.

Au sortir de la chaudière, les fumées circulent aux conditions v_f , T_f et ρ_f . On admettra qu'en régime permanent ces conditions sont conservées jusqu'à l'éjection en sortie cheminée (conduit isolé de diamètre constant).

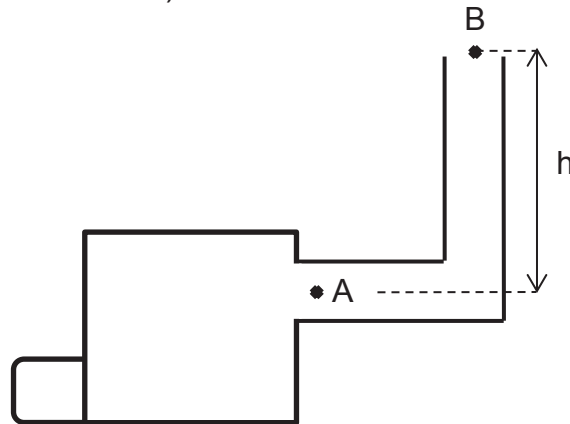


Figure 6 : conduit de cheminée

Question 8 :

Montrer que l'écoulement naturel constaté provoque une dépression d en sortie chaudière :

$$d = p_{eA} - p_{fA} = g \times h \times (\rho_e - \rho_f) - \Delta X$$

Cette dépression, communément appelée tirage, permet « d'aspirer » les fumées de la chambre de combustion :

Trop élevé, le tirage cause une surconsommation de combustible ; trop faible, il réduit la puissance de la chaudière en « l'étouffant ».

Comment évolue d avec h , T_f , T_e , ΔX ?

Montrer que d est lié à la vitesse des fumées par $d = \frac{1}{2} \times \rho_f \times v_f^2$ (pression dynamique)

On précise :

- Les caractéristiques des fumées sont indicées « f »,
- Les caractéristiques de l'air extérieur sont indicées « e ».

Les pertes de charge du conduit cylindrique de fumées de diamètre D sont dues :

- aux frottements internes et avec la paroi. On parle de pertes de charge régulières :

$$\Delta X_R = \frac{\Lambda \times L}{D} \times p_{dyn} \quad \text{avec } \Lambda : \text{coefficient de frottement}$$

L : longueur du conduit en [m]

D : diamètre du conduit en [m]

p_{dyn} : pression dynamique en [Pa]

- aux obstacles divers (variations géométriques, filtres,...). On parle de pertes de charge singulières :

$$\Delta X_S = \sum \zeta \times p_{dyn} \quad \text{avec } \zeta : \text{coefficient d'accident}$$

p_{dyn} : pression dynamique en [Pa]

Question 9 :

La longueur de parcours des fumées L peut être assimilée à la hauteur h du conduit : le tronçon horizontal raccordé à la buse ayant une influence négligeable (faible longueur).

Exprimer $h = f(d, D)$ et **tracer** l'allure $h = f(D)$ en fixant d .

Préciser les limites h_{\min} et D_{\min} .

Afin de s'affranchir de l'influence des conditions météorologiques, notamment le vent, une vitesse d'éjection minimale est requise en sortie cheminée : cela limite le diamètre du conduit.

Quels critères pratiques bornent la hauteur h ?

Aux conditions nominales de fonctionnement et à pleine charge, la chaudière bois principale produit un débit de fumées de $10900 \text{ m}^3/\text{h}$.

Le diamètre du conduit d'évacuation a été dimensionné à 600 mm afin de respecter la vitesse d'éjection minimale réglementaire de 6 m/s (dimensionnement effectué pour la charge partielle minimale de la chaudière).

Question 10 :

Evaluer la hauteur de cheminée nécessaire pour évacuer le débit nominal de fumées.

La hauteur de cheminée a été limitée à 14 m afin de juste respecter le niveau d'immission réglementaire.

Quel débit d'extraction en $[\text{m}^3/\text{h}]$ obtient-on par tirage naturel ?

En appliquant le théorème de Bernoulli, **déterminer** les caractéristiques de l'extracteur de fumées à installer (Q_v $[\text{m}^3/\text{h}]$, Δp_v $[\text{Pa}]$).

On rappelle :

- Le débit volumique est lié à la vitesse moyenne de circulation par $Q_v = v \times S$ où S est la section de passage du conduit.

On précise :

- Caractéristiques des fumées : $T_f = 200^\circ\text{C}$ $\rho_f = 0,7 \text{ kg/m}^3$
- Caractéristiques de l'air extérieur : $T_e = 25^\circ\text{C}$ $\rho_e = 1,2 \text{ kg/m}^3$
- Coefficient de frottement : $\Lambda = 0,023$
- Coefficient d'accidents : $\Sigma\zeta = 5$
(valeur relativement élevée due à la présence d'un système de filtration)

PARTIE 3 – Etude du réseau de distribution primaire

(3 points)

L'objectif de cette partie est d'évaluer le rendement de distribution d'un réseau simplifié et d'explorer des pistes d'optimisation des réseaux de chaleur enterrés.



Figures 7 :
Tubes et pose en tranchée



Le réseau de canalisations est composé de tubes pré-isolés de 6 ou 12 mètres (tube médian acier, enveloppe polyéthylène de haute densité et isolation thermique polyuréthane injectée).

L'ingénierie des réseaux de chaleur a pour mission de renforcer la pertinence technique, économique et environnementale du procédé vis-à-vis des solutions décentralisées, ceci afin que son efficacité énergétique soit à la mesure de celle des bâtiments (souvent basse consommation) qu'il va desservir.

Or tout réseau de chaleur subit des pertes d'énergie causées notamment par les déperditions thermiques des canalisations. Avec la diminution des quantités de chaleur demandées par les bâtiments, la part relative de ces pertes augmente dans le bilan de consommation globale et la compétitivité du réseau s'en trouve affectée.

Pour illustrer l'étude, nous nous baserons sur un modèle élémentaire composé d'une seule sous-station :

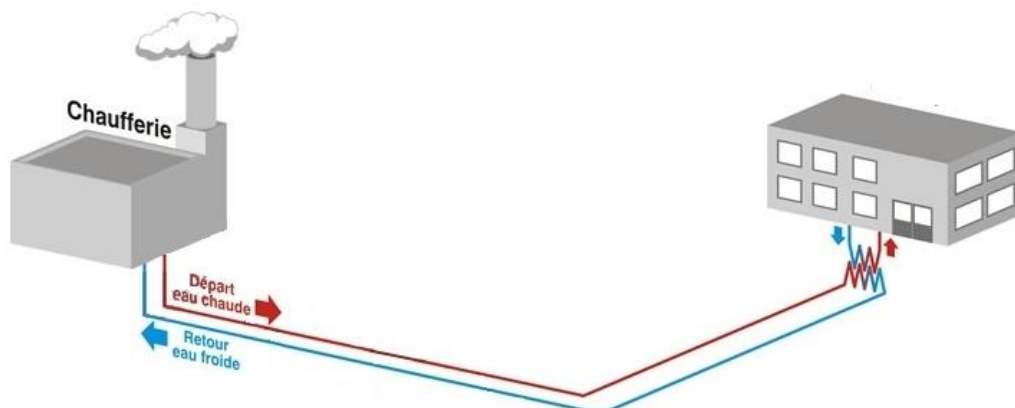


Figure 8 : modélisation du réseau

Les données retenues pour l'étude sont :

- Puissance nominale de sous-station : 2 MW
- Température extérieure de base : -10°C
- Distance chaufferie – sous-station : 3 km (équivalente à la longueur du réseau)
- Fluide : eau à 4 bar
 - Température départ chaufferie 105°C
 - Masse volumique 1000 kg/m³
 - Chaleur massique 4185 J/kg°C
 - Débit volumique 56 m³/h
- Canalisation : DN 150
 - Diamètres tube acier 160,3 mm (int) et 168,3 mm (ext)
 - Epaisseur isolation 40 mm
 - Conductivité thermique λ_{iso} 0,027 W/m°C
- Sol :
 - Profondeur de pose 1 m (prise au centre du tube)
 - Conductivité thermique λ_{sol} 1,5 W/m°C

En négligeant les résistances thermiques de surface interne, de l'acier et de l'enveloppe polyéthylène, la résistance linéique globale d'un tube à l'air libre est définie en [m°C/W] par :

$$R_g = \left[\frac{\ln \left(\frac{D_{ext}}{D_{int}} \right)}{2 \times \pi \times \lambda} \right]_{isolant} + \frac{1}{\pi \times D_{ext} \times h_{ext}}$$

où h_{ext} est le coefficient d'échange superficiel externe

Lorsque le tube est enterré, on peut montrer par la méthode des images que la résistance de surface externe est remplacée par un terme lié à l'environnement du tube :

$$R_g = \left[\frac{\ln \left(\frac{D_{ext}}{D_{int}} \right)}{2 \times \pi \times \lambda} \right]_{isolant} + \left[\frac{\ln \left(\frac{4 \times p}{D_{ext}} \right)}{2 \times \pi \times \lambda} \right]_{sol}$$

où p est la profondeur de pose de la canalisation

Tout se passe donc comme si thermiquement, le tube était enveloppé par une gangue de terre de diamètre équivalent à quatre fois sa profondeur de pose.

Question 11 :

Après avoir précisé les diamètres intérieur et extérieur de l'isolant, **calculer** la résistance globale du tube enterré.

En déduire le gain par rapport à un tube installé en caniveau ($h_{ext} = 10 \text{ W/m}^2\text{°C}$).

Quelle est la proportion X [%] apportée par le sol dans la résistance globale ?

Tracer l'évolution $X = f(p)$, p variant de 0,5 à 2 mètres et **discuter** de son influence sur la valeur de R_g .

Quels critères pratiques sont retenus pour définir la profondeur de pose ?

Dans un tronçon de longueur L, les pertes de chaleur P [W], aussi appelées pertes en ligne, peuvent s'exprimer :

- thermiquement : $P = U \times L \times \Delta T_{\text{int-ext}}$ avec $U = 1/R_g$
- calorimétriquement : $P = q_m \times C \times \Delta T_{\text{entrée-sortie}}$ avec q_m débit massique [kg/s]
C chaleur massique [J/kg°C]

Ces pertes s'illustrent donc par un abaissement de la température du fluide le long de son parcours.

Le bilan thermique sur un élément de longueur de canalisation dx à température considérée homogène T conduit à l'égalité :

$$\begin{aligned} \text{flux échangé avec l'extérieur} &= \text{puissance perdue par le fluide} \\ U \times dx \times (T - T_{\text{ext}}) &= - q_m \times C \times dT \end{aligned}$$

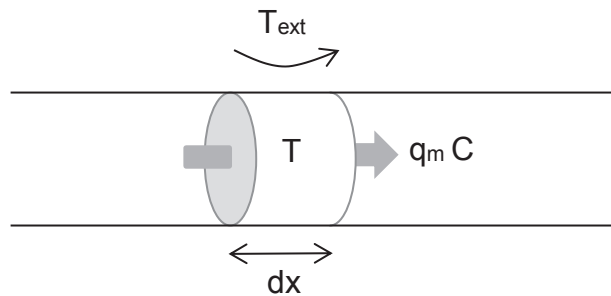


Figure 9 : discrétisation de l'échange

Question 12 :

En intégrant l'équation sur une longueur de tronçon L, **montrer** que :

- La température du fluide évolue de manière exponentielle

$$T_S = T_{\text{ext}} + (T_E - T_{\text{ext}}) \times e^{-\frac{U \times L}{q_m \times C}}$$

- Les pertes en ligne peuvent s'exprimer sous la forme

$$P = U \times L \times \frac{T_E - T_S}{\ln\left(\frac{T_E - T_{\text{ext}}}{T_S - T_{\text{ext}}}\right)}$$

On précise :

- T_E et T_S sont les températures d'entrée et de sortie du tronçon.

Question 13 :

Déterminer les pertes en ligne P [kW] du réseau élémentaire présenté *figure 8*.

En déduire le rendement de distribution. **Commenter** les résultats.

On précise : $U = 0,39 \text{ W/m}^\circ\text{C}$

Question 14 :

Proposer quatre leviers d'action (en conception ou exploitation) permettant de réduire les pertes de chaleur du réseau primaire. Chaque proposition sera énoncée en précisant avantage(s), inconvénient(s) et limite(s) d'application éventuels.

PARTIE 4 – Étude d'un voile enterré du local vépins

(6 points)

L'objectif de cette partie est de déterminer les sollicitations exercées sur le voile enterré du local vépins.

Étudions les paramètres des sols mis en œuvre après construction de l'ouvrage, en remblais.

Un sol est un mélange :

- d'éléments solides (le squelette),
- d'eau, sous plusieurs formes (libre, capillaire, adsorbée),
- de gaz contenu dans les vides (air pour un sol sec, mélange air et vapeur d'eau pour un sol humide).

Rappelons les paramètres de définition des sols, ainsi que le modèle élémentaire :

Un sol étant constitué de grains solides, d'eau et d'air, chaque phase peut être rassemblée en un volume partiel unique :

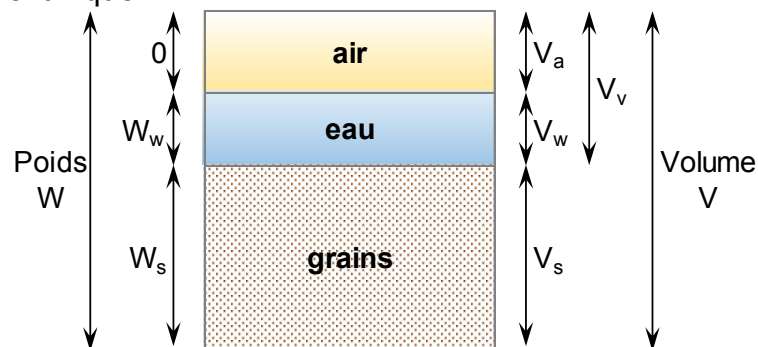


Figure 10 : représentation du modèle élémentaire d'un sol

Où : V_a : volume de l'air
 V_w : volume de l'eau
 V_s : volume des grains solides
 W_w : poids de l'eau
 W_s : poids des grains solides

On définit les poids volumiques γ suivants :

Poids volumique total ou humide	$\gamma_h = \frac{W}{V}$
Poids volumique des grains solides	$\gamma_s = \frac{W_s}{V_s}$
Poids volumique du sol sec	$\gamma_d = \frac{W_s}{V}$
Poids volumique de l'eau	$\gamma_w = \frac{W_w}{V_w}$
Poids volumique du sol saturé	$\gamma_{sat} = \frac{W}{V}$
Poids volumique déjaugé	$\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$

Les paramètres d'état indiquent les proportions dans lesquelles existent les différentes phases d'un sol. Sont définis :

La teneur en eau : $\omega = \frac{W_w}{W_s}$

L'indice des vides : $e = \frac{V_v}{V_s}$
 Le degré de saturation : $S_r = \frac{V_w}{V_v}$
 La porosité : $n = \frac{V_v}{V}$

Question 15 :

Exprimer la porosité n en fonction de l'indice des vides e .

Exprimer le poids volumique sec γ_d en fonction du poids volumique humide γ_h et de la teneur en eau ω .

Exprimer la teneur en eau à saturation ω_{sat} en fonction du poids volumique sec γ_d et de la porosité n .

Exprimer l'indice des vides e en fonction du poids volumique saturé γ_s et du poids volumique sec γ_d .

Lors de la phase de remblayage des locaux enterrés, après construction du bâtiment, deux matériaux sont utilisés. Afin de répondre aux exigences environnementales, les matériaux issus des terrassements sont privilégiés pour être réutilisés sur site. D'autre part, il est nécessaire d'assurer des caractéristiques mécaniques en surface, nécessitant, dans le cas présent, le recours à des matériaux d'apport.

Deux matériaux sont ainsi utilisés en remblais autour de la partie enterrée de l'ouvrage construit. Leurs caractéristiques sont les suivantes :

Remblais 1 : poids volumique humide $\gamma_h = 18 \text{ kPa}$
 cohésion $c' = 0 \text{ kPa}$
 angle de frottement $\varphi' = 35^\circ$

Remblais 2 : poids volumique humide $\gamma_h = 19 \text{ kPa}$
 poids volumique saturé $\gamma_{sat} = 21 \text{ kPa}$
 cohésion $c' = 5 \text{ kPa}$
 angle de frottement $\varphi' = 25^\circ$

Le remblais 1 est le matériau d'apport, utilisé en surface.

Le remblais 2 est issu des terrassements sur site.

Le voile enterré du local vépins est assimilé à un mur de soutènement :

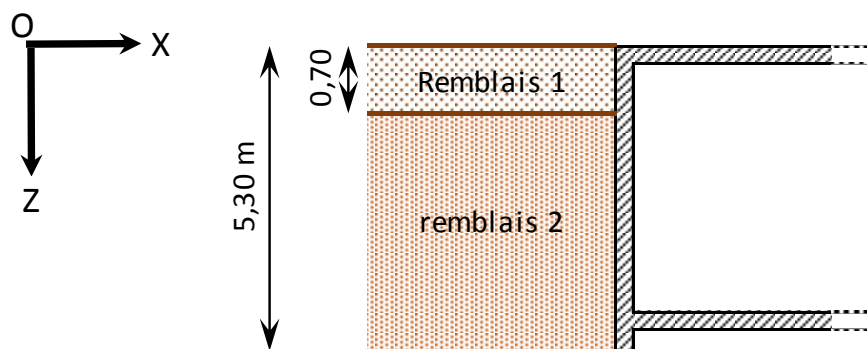


Figure 11 : voile enterré du local vépins

Les sols exercent des pressions verticales sur les couches sous-jacentes. Cela engendre des pressions horizontales dites « poussée des terres ». Un ouvrage enterré doit ainsi être conçu de manière à résister à cette poussée.

La détermination de la contrainte horizontale nécessite de connaître une loi de comportement pour le sol. On appelle classiquement K le rapport entre contrainte horizontale et verticale.

Pour un massif de sol, on distingue trois états d'équilibre :

- état au repos : le rapport entre la contrainte horizontale effective et la contrainte verticale effective s'exprime au moyen du coefficient des terres au repos $K_0 = \frac{\sigma'_h}{\sigma'_v}$
- état actif ou de poussée (faisant intervenir K_a)
- état passif ou de butée faisant intervenir K_p)

Selon la théorie de Rankine, l'équilibre des contraintes dans un sol est exprimé par l'enveloppe de rupture (courbe intrinsèque) issue de l'équation de Coulomb : $\tau = c + \sigma' \tan \varphi$
L'état de contraintes agissant sur un élément de sol (σ'_h , σ'_v) est représenté par un cercle de Mohr.

Question 16 :

Tracer dans un repère (σ, τ) les cercles de Mohr représentant les trois états d'équilibre d'un sol (au repos, en poussée, en butée).

Étudions la répartition des contraintes dans le sol, selon deux situations particulières, liées à la présence d'eau, ou non, dans le sol. Le terrain est considéré **horizontal, sans surcharge**.

Le parement de la paroi du local est lisse et vertical.

Les paramètres des sols sont ceux mentionnées pour les remblais 1 et 2.

Par simplification, le coefficient de poussée (actif) K_a sera le même dans les conditions de sol humide ou saturé.

Nous considérons l'état à long terme.

Première situation : **pas de présence de nappe d'eau dans le sol.**

Question 17 :

Tracer, en fonction de la profondeur z , les courbes de variation :

- de la contrainte totale verticale,
- de la contrainte totale horizontale,

en indiquant les valeurs particulières, notamment à l'interface entre les deux sols.

Question 18 :

Calculer :

- la résultante des efforts sur le voile,
- le moment fléchissant en pied de mur (à $z = 5,30$ m).

Deuxième situation : présence d'une nappe d'eau dans le sol, à la cote $z = 4,00$ m.

Question 19 :

Tracer, en fonction de la profondeur z , les courbes de variation :

- de la contrainte totale verticale,
- de la contrainte totale horizontale,

en indiquant les valeurs particulières, notamment à l'interface entre les deux sols.

Question 20 :

Calculer :

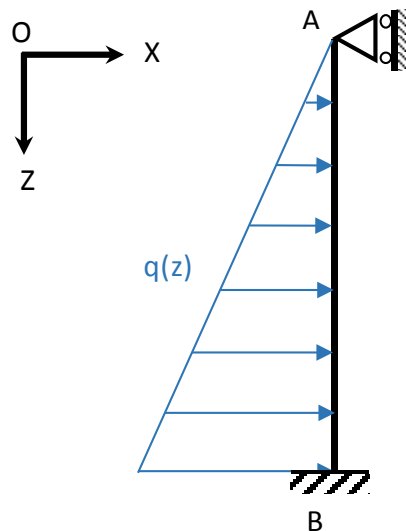
- la résultante des efforts sur le voile,
- le moment fléchissant en pied de mur (à $z = 5,30$ m).

Question 21 :

Que pouvez-vous déduire de l'influence de la présence d'eau dans le sol ?

Quelles hypothèses sont à considérer pour le dimensionnement du voile ?

Ce voile doit être dimensionné afin de résister à la poussée des terres. Il convient de calculer les efforts internes. Pour une première approche, cet élément peut être représenté selon le modèle suivant (figure 12), en considérant que le radier engendre un encastrement en pied de mur, en B, à la cote 5,00 mètres sous le niveau du terrain fini.



Données :

$$L = L_{AB} = 5,00 \text{ m}$$

$$\text{En } z = 0 \quad q(A) = 0$$

$$\text{En } z = 5,00 \text{ m} \quad q(B) = 40 \text{ kN}$$

Figure 12 : modélisation du mur étudié

Précisions sur la représentation des sollicitations (conventions de signes) communément admises, à utiliser dans les raisonnements pour les questions suivantes :

Nous considérerons essentiellement des problèmes plans.

Pour les efforts extérieurs situés dans un plan (O, x, z) , les seules composantes non nulles du torseur des sollicitations sont :

- l'effort normal suivant z , $N_z(z)$
- l'effort tranchant suivant x , noté $V_x(z)$
- le moment fléchissant suivant y , noté $M_y(z)$

La représentation à adopter est présentée figure 13 (avec F_i efforts extérieurs quelconques et R_i réactions de liaisons quelconques).

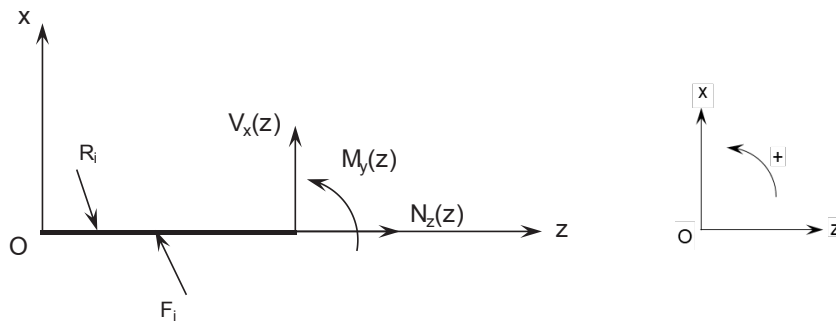


Figure 13 : Conventions de signes

Les sollicitations N , V , M sont représentées, par convention, par un vecteur dans le sens positif des axes. Ainsi, le sens positif pour les couples et moments fléchissants portés par y est le sens trigonométrique direct.

Question 22 :

Calculer le degré d'hyperstaticité du schéma mécanique de la figure 12.

Établir les équations littérales de l'effort tranchant (noté $V_x(z)$) et du moment fléchissant (noté $M_y(z)$).

Tracer les diagrammes correspondants, en indiquant les valeurs particulières.

Tableau partiel des intégrales de Mohr $\int_0^L m_i(x).m_j(x).dx :$

$m_i(x)$	$m_j(x)$	M_j	M_i	M_j
		LM_iM_j	$\frac{1}{2} LM_iM_j$	$\frac{1}{2} LM_i(M_j + M'_j)$
		$\frac{1}{2} LM_iM_j$	$\frac{1}{3} LM_iM_j$	$\frac{1}{6} LM_i(2M_j + M'_j)$
		$\frac{1}{2} LM_j(M_i + M'_i)$	$\frac{1}{6} LM_j(2M_i + M'_i)$	$\frac{1}{6} L \left(2M_iM_j + M_iM'_j + M'_iM_j + 2M'_iM'_j \right)$
		$\frac{1}{2} LM_iM_j$	$\frac{1}{4} LM_iM_j$	$\frac{1}{4} LM_i(M_j + M'_j)$
		$\frac{2}{3} LM_iM_j$	$\frac{1}{3} LM_iM_j$	$\frac{1}{3} LM_i(M_j + M'_j)$

Dans le tableau, M_i , M_j , M'_i , M'_j , sont les extremums des fonctions $m_i(x)$ et $m_j(x)$. Ils sont à prendre en valeurs algébriques.

PARTIE 5 – Étude mécanique d'une poutre continue du rez-de-chaussée

(4 points)

L'objectif de cette partie est de déterminer les sollicitations sur la poutre principale du plancher du rez-de-chaussée, au niveau du local abritant les deux chaudières gaz.

Ces chaudières gaz participent à la production d'eau chaude : elles permettent d'assurer l'appoint des chaudières biomasse en cas de demande importante voire un secours en cas de défaillance de l'une des chaudières principales.

Le positionnement des chaudières gaz est symétrique sur la poutre continue sur 3 appuis. Elles apportent une charge uniformément répartie, centrée, sur chacun des deux tronçons.

Nous allons étudier **uniquement l'incidence de la surcharge liée à ces équipements** (sans prendre en considération les charges réparties liées au poids propre de la structure et aux charges d'exploitation sur le plancher).

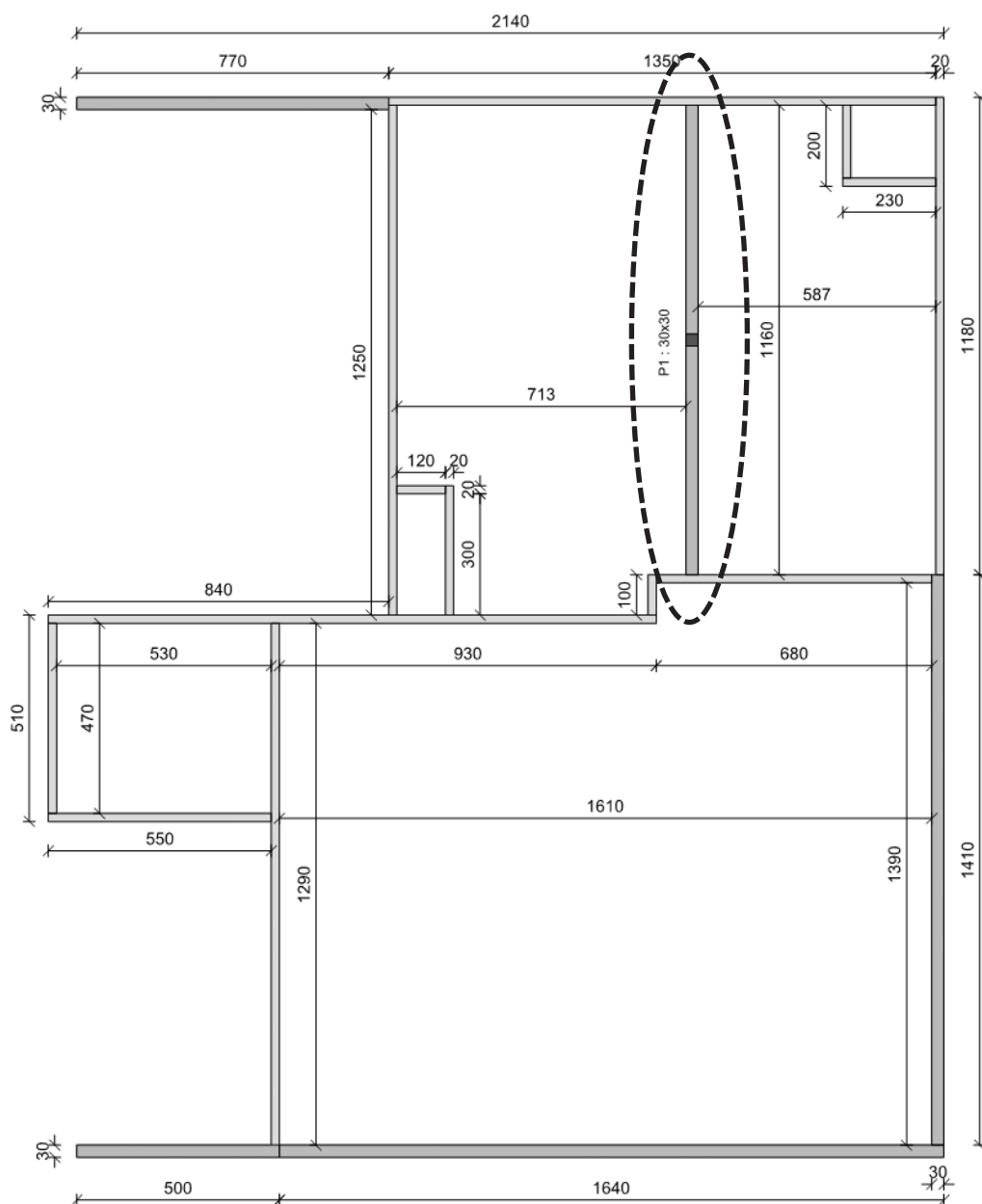


Figure 14 : extrait simplifié du plan de coffrage du rez-de-chaussée avec identification de la poutre étudiée

Théorème de Clapeyron :

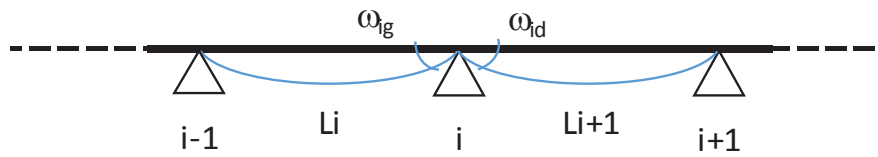


Figure 15 : Schéma d'une poutre continue sur n appuis

Considérons deux travées consécutives (i) et (i+1) d'une poutre continue, à n travées, de longueurs respectives L_i et L_{i+1} , soumises respectivement à des charges q_0 . On écrit :

$$\frac{1}{6} \frac{L_i}{E_i I_i} M_{i-1} + \frac{1}{3} \left(\frac{L_i}{E_i I_i} + \frac{L_{i+1}}{E_{i+1} I_{i+1}} \right) M_i + \frac{1}{6} \frac{L_{i+1}}{E_{i+1} I_{i+1}} M_{i+1} = \omega_{ig} - \omega_{id}$$

Avec les notations suivantes :

- L_i longueur de la travée i
- M_i moment fléchissant sur l'appui i
- I_i moment quadratique de la travée i (entre appuis i et i+1)
- E_i module de Young de la travée i (entre appuis i et i+1)
- ω_{ig} rotation en i, à gauche de l'appui i (calcul en travée isostatique)
- ω_{id} rotation en i, à droite de l'appui i (calcul en travée isostatique)

Ce théorème permet d'obtenir autant d'équations que d'inconnues. Les structures isostatiques associées (tronçons entre appuis) font apparaître comme inconnues hyperstatiques les moments fléchissants M_i , s'exerçant au droit des appuis.

La poutre étudiée peut être modélisée selon le schéma de la figure 16, dans un repère global (O, x, y). Elle est constituée de 2 travées de même longueur, chargées de façon identique et symétrique.

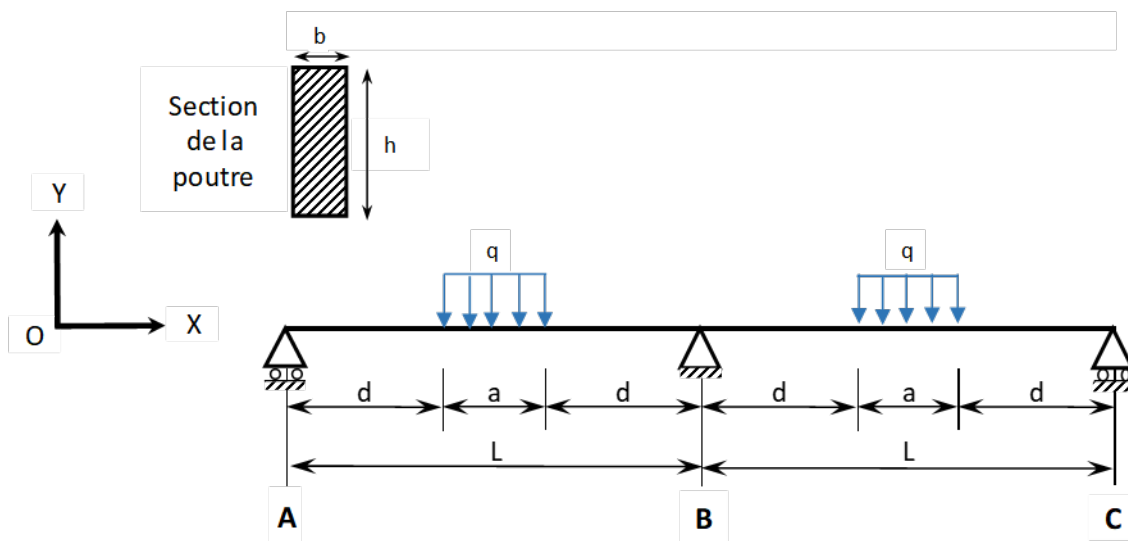


Figure 16 : Modélisation de la poutre étudiée

Données numériques : $L = 5,90 \text{ m}$
 $a = 1,40 \text{ m}$
 $d = 2,25 \text{ m}$
 $b = 30 \text{ cm}$
 $h = 80 \text{ cm}$
 $q = 100 \text{ kN.m}^{-1}$
 Module de Young du béton $E = 40\,000 \text{ MPa}$

De même que dans la partie précédente, les raisonnements seront menés selon les conventions de signes suivantes :

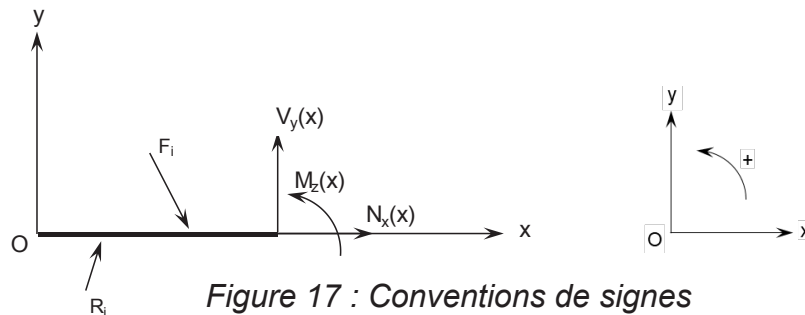


Figure 17 : Conventions de signes

Question 23 :

Calculer le degré d'hyperstaticité de la poutre étudiée, nommée ABC, modélisée fig.16.

Question 24 :

Pour cette même poutre, **démontrer**, en justifiant, l'équation suivante :

$$M_A + 4M_B + M_C = \frac{6EI}{L} (\omega_{Bg} - \omega_{Bd})$$

Question 25 :

Montrer que la rotation sur appuis, en travée isostatique, s'écrit :

$$\omega = \pm \frac{qa}{48EI} (3L^2 - a^2)$$

Question 26 :

A partir des relations démontrées précédemment :

Calculer les moments fléchissants sur appuis.

Calculer les réactions d'appuis.

Déterminer l'expression de l'effort tranchant dans la poutre, en fonction de l'abscisse.

Tracer le diagramme.

Déterminer l'expression du moment fléchissant dans la poutre, en fonction de l'abscisse. **Tracer** le diagramme.

Question 27 :

En considérant la travée AB isolée, **isostatique**, sur 2 appuis, **tracer le diagramme des moments fléchissants**, en indiquant les valeurs remarquables.

Question 28 :

Comparer les valeurs des moments obtenus dans la travée de poutre AB, selon qu'elle soit isolée ou élément de la poutre continue.

Quel intérêt présente une poutre continue du point de vue du dimensionnement en béton armé ?