MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

JBE MAT 1

SESSION 2022

CAPES A AFFECTATION LOCALE A MAYOTTE
CONCOURS EXTERNE

Section: MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION

Durée : 5 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juin 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie et poursuivre l'épreuve.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours externe du CAPES à affectation locale à Mayotte de l'enseignement public** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
JBE	1300E	101	0312

IMPRIMERIE NATIONALE – 22 0664 – D'après documents fournis

Problème 1 : un pentagone non régulier

Ce problème est constitué de deux parties indépendantes.

A - Construction d'un pentagone paveur

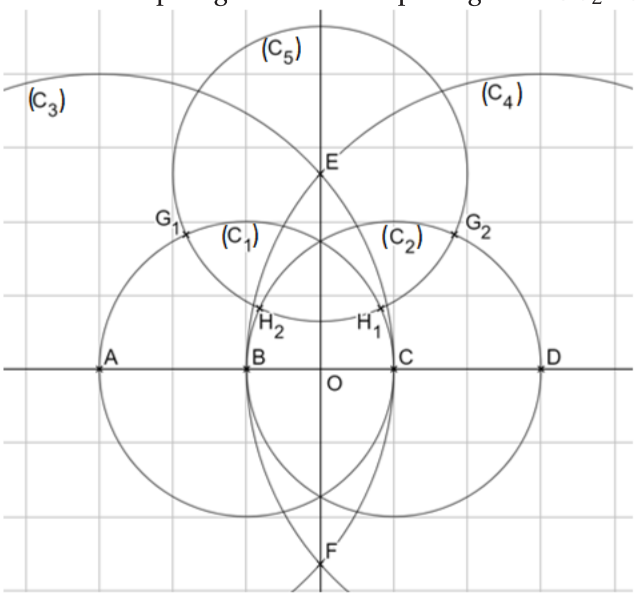
Certains trottoirs de la ville du Caire sont pavés de pièces pentagonales non régulières. On s'intéresse à celles dont les cinq côtés ont même longueur.

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A\left(-\frac{3}{2};0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $C\left(\frac{1}{2};0\right)$ et $D\left(\frac{3}{2};0\right)$.

On construit :

- (C_1) le cercle de centre B et de rayon 1 ;
- (C_2) le cercle de centre C et de rayon 1 ;
- (C_3) le cercle de centre A et de rayon 2 ;
- (C_4) le cercle de centre D et de rayon 2 ;
- E et F les points d'intersection des cercles (C_3) et (C_4) tels que E est d'ordonnée positive ;
- (C_5) le cercle de centre E et de rayon 1 ;
- G_1 et H_1 les points d'intersection de (C_5) avec (C_1) tels que G_1 est d'abscisse négative ;
- G_2 et H_2 les points d'intersection de (C_5) avec (C_2) tels que G_2 est d'abscisse positive.

L'élément de pavage étudié est le pentagone BCG_2EG_1 .



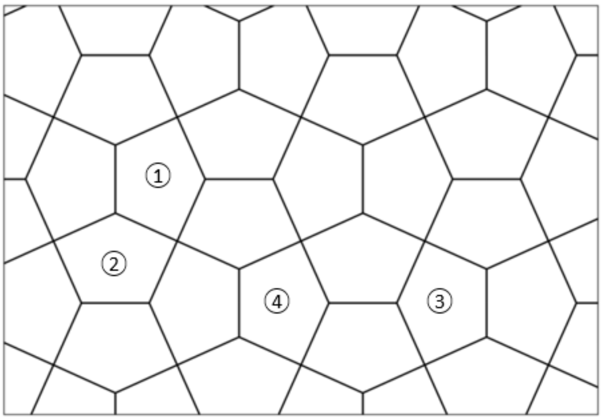
1 – Démontrer que E a pour coordonnées $\left(0;\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

2 – Démontrer que l'angle $\widehat{BG_1E}$ est droit.

3 – Déterminer une équation cartésienne de chacun des cercles (C_1) et (C_5) puis justifier que le point G_1 a pour coordonnées $\left(\frac{-\sqrt{7}-1}{4};\frac{\sqrt{7}+1}{4}\right)$.

B - Pavage

On admet que le pentagone construit dans la partie A permet de paver le plan.
Quatre copies du motif pentagonal numérotées ①, ②, ③ et ④) ont été mises en évidence sur la figure ci-dessous.



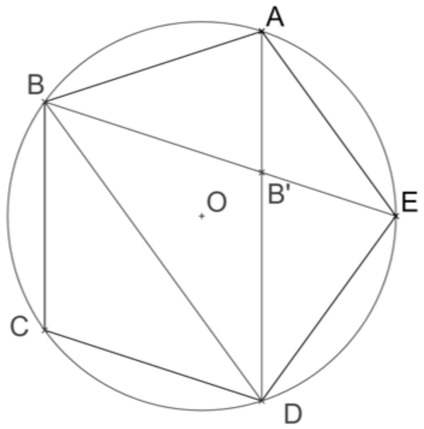
1 – Déterminer une transformation du plan permettant de construire le pentagone ② à partir du pentagone ①. En préciser les éléments caractéristiques.

2 – Déterminer de même une transformation du plan permettant de construire le pentagone ③ à partir du pentagone ①.

3 – Déterminer de même une transformation du plan permettant de construire le pentagone ④ à partir du pentagone ①.

Problème 2 : le pentagone régulier

A - Triangle et nombre d'or



$ABCDE$ est un pentagone régulier de côté 1, inscrit dans un cercle de centre O. On rappelle que les côtés sont tous de même longueur, et que les angles aux sommets formés par les côtés du pentagone sont de même mesure.

1 – Justifier que l'angle $\widehat{ABC}$ mesure $\dfrac{3\pi}{5}$ radians.

2 – Déterminer une mesure de chacun des angles du triangle ABD.

3 – Soit B' le point d'intersection des segments $[BE]$ et $[AD]$.
Démontrer que les triangles ABB' et ABD sont semblables.

4 – On appelle φ la longueur du segment $[AD]$.

(a) Justifier que $AB' = \varphi - 1$, puis exprimer les longueurs des côtés des triangles ABB' et ABD en fonction de φ.

(b) Démontrer que φ est solution de l'équation [1] : $X^2 - X - 1 = 0$.

(c) En déduire la valeur de φ.

B - Une approche avec les nombres complexes

Soit $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}} \in \mathbb{C}$.
Dans le plan complexe, les sommets d'un pentagone régulier sont les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 d'affixes respectives $1, \omega, \omega^2, \omega^3$ et ω^4.
On pose $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

1 – Démontrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$, puis que $\alpha + \beta = -1$ et $\alpha\beta = -1$.
En déduire que α et β sont les solutions de l'équation [2] : $X^2 + X - 1 = 0$.

2 – Justifier que $\omega^4 = \dfrac{1}{\omega}$ et que $\overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega}$.

3 – En déduire que $\alpha = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et déterminer la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ en résolvant l'équation [2].

4 – On considère les points B d'affixe i et C d'affixe $-\dfrac{1}{2}$.

Le cercle de centre C passant par B coupe l'axe des réels en un point M d'abscisse positive et un point N d'abscisse négative.

(a) Démontrer que les points M et N ont pour affixes respectives α et β.

(b) En déduire que la médiatrice du segment $[OM]$ coupe le cercle unité en les points A_1 et A_2.

(c) Achever la construction du pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$.

Problème 3 : urne de Polya

Ce problème est constitué de deux parties indépendantes.

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on réalise n fois l'opération :

- tirer au hasard une boule et regarder sa couleur ;
- remettre dans l'urne la boule et ajouter une boule de sa couleur.

On note :

- V_k l'événement "la k-ième boule tirée est verte", pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
- X_n la variable aléatoire comptabilisant le nombre de boules vertes extraites à l'issue des n opérations.

A - Étude du cas $n = 3$

Dans cette partie, l'urne contient au départ une boule verte et trois boules blanches.

1 – Donner la probabilité de l'événement V_1 "la première boule tirée est verte".

2 – Calculer $P_{V_1}(V_2)$ et $P_{\overline{V_1}}(V_2)$

3 – Calculer $P(V_1 \cap V_2)$ puis montrer que $p(V_2) = \dfrac{1}{4}$.

4 – Calculer $P_{V_2}(V_1)$ puis interpréter ce résultat dans le contexte du problème.

5 – Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_3 ?

6 – Donner la loi de probabilité de X_3.

7 – Déterminer $E(X_3)$ et $V(X_3)$.

B - Étude de la composition de l'urne au bout de n opérations

L'urne contient au départ une boule verte et une boule blanche.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on réalise n fois l'opération "tirage" et "ajout d'une boule dans l'urne".

1 – Démontrer que pour tout entier k compris entre 0 et n, $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$.

2 – Reconnaitre la loi de probabilité de X_n et déterminer son espérance et sa variance.

3 – Compléter et recopier les lignes 6 et 8 du script de la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie la proportion de boules vertes à l'issue d'une simulation de n opérations.

```
3  from random import *
4  def  proportion(n) :
5
6     (a,b)=.......
7     for i in range (n) :
8       if random() < ........
9           a=a+1
10      else :
11          b=b+1
12    return (a/(a+b))
13
```

La fonction random() retourne un nombre pseudo aléatoire strictement compris entre 0 et 1.

Problème 4 : propriétés de la moyenne

Soit $(x_i; n_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une série statistique d'effectif total N que l'on peut représenter par le tableau d'effectifs suivant :

modalité	x_1	x_2	...	..			x_p
effectif	n_1	n_2					n_p

On note m la moyenne de cette série statistique et σ son écart-type.

A - Propriétés de la moyenne d'une série statistique

1 – Exprimer m en fonction des entiers n_i et des réels x_i.

2 – Établir le résultat suivant : $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant p}(x_i) \leqslant m \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p}(x_i)$.

3 – Soient a et b deux nombres réels.
La série statistique $(y_i; n_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est définie à partir de la série statistique $(x_i; n_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ en posant pour tout entier naturel i compris entre 1 et p, $y_i = ax_i + b$.

(a) Exprimer la moyenne m' de la série $(y_i; n_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ en fonction de m.

(b) Utiliser cette propriété pour calculer la moyenne de la série statistique "relevé en heures minutes secondes des temps réalisés lors d'un marathon par les vingt meilleurs coureurs" :

02:15:39	02:16:41	02:16:50	02:18:22	02:18:36	02:19:44	02:19:47	02:20:00	02:20:14	02:22:34
02:23:30	02:23:49	02:24:10	02:24:40	02:25:07	02:25:09	02:25:45	02:25:49	02:25:56	02:26:31

B - Problème d'optimisation

Soit la fonction S définie, pour tout réel x, par : $S(x) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{p} n_i(x - x_i)^2$.

1 – Vérifier que S est une fonction polynôme du second degré et déterminer ses coefficients.

2 – Dresser le tableau de variation de la fonction S.

3 – Exprimer le minimum de la fonction S à l'aide de l'écart type σ.

4 – Justifier la positivité de la fonction S sur l'ensemble des réels puis établir le résultat suivant :

$$m^2 \leqslant \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \times x_i^2$$

Problème 5 : multiplication, racine treizième

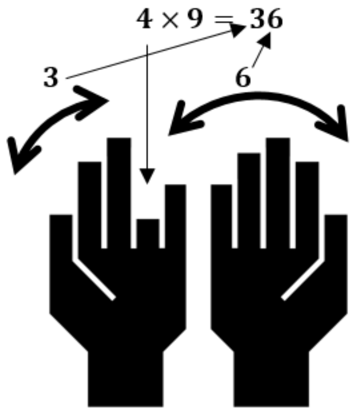
Ce problème est constitué de trois parties indépendantes.

A - Table de neuf et preuve par neuf.

Pour calculer 4×9 avec les doigts, c'est tout simple :

- Tenez les deux mains face à vous
- Les doigts sont numérotés de 1 à 10
- Plier le doigt numéro 4
- Les doigts levés à gauche donnent le chiffre des dizaines : 3
- Les doigts levés à droite donnent le chiffre des unités : 6
- Alors $4 \times 9 = 36$

Cette astuce fonctionne pour toute la table de multiplication par 9.



4e doigt plié

1 – Soit n un entier compris entre 2 et 9. En positionnant les deux mains comme indiqué ci-dessus, on abaisse le n-ième doigt.

(a) Exprimer en fonction de n le nombre de doigts à gauche puis le nombre de doigts à droite du doigt abaissé.

(b) Justifier que la méthode précédente donne bien le résultat de la multiplication de n par 9.

2 – Un élève constate que, dans la table de multiplication par 9, la somme des chiffres du résultat vaut 9. Son professeur souhaite généraliser ce résultat en justifiant que la somme des chiffres d'un multiple de 9 est elle-même multiple de 9.

Soit A un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{a_n \dots a_0} = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$.

On note $s(A)$ la somme des chiffres du nombre A : $s(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i$

(a) Montrer que A et $s(A)$ ont le même reste dans la division euclidienne par 9.

(b) En déduire que la somme des chiffres d'un multiple de 9 est elle-même multiple de 9.

3 – On note $r(A)$ et on appelle racine numérique du nombre A le reste dans la division euclidienne de A par 9.

La "preuve par 9" d'une multiplication posée consiste à vérifier que la racine numérique du produit de deux entiers naturels A et B est égale à la racine numérique du produit des racines numériques de A et de B.

Justifier que, pour tous entiers naturels A et B : $r(A \times B) = r(r(A) \times r(B))$

4 – Cette propriété permet-elle de valider ou d'invalider, sans effectuer l'opération, chacune des multiplications réalisées ci-dessous par un élève ? Justifier chaque réponse.

Première multiplication : $39 \times 47 = 1\,823$

Seconde multiplication : $36 \times 124 = 4\,644$

B - Multiplication védique.

Un élève explique à ses camarades une étrange méthode de multiplication à partir de cet exemple :
"Je veux multiplier 92 et 97. Comme les nombres sont proches de 100, je retiens les compléments 8 et 3. Leur somme fait 11, dont le complément est 89, puis leur produit fait 24. Je trouve donc que $92 \times 97 = 8\,924$."

1 – Justifier que cette méthode peut être appliquée au produit de $100 - x$ et $100 - y$ pour tous nombres entiers relatifs x et y.

2 – Utiliser cette méthode pour calculer le pourcentage d'évolution globale correspondant à une augmentation de 3 % suivie d'une diminution de 2 %.

C - Racine treizième et congruences.

Soit n un entier naturel quelconque. On étudie $A = n^{13} - n$.

1 – Démontrer que A est pair.

2 – (a) Démontrer que $n^4 - 1$ divise $n^{12} - 1$.

(b) Justifier que, pour tout entier naturel x non divisible par 5, $x^4 \equiv 1\ [5]$

(c) En déduire que A est divisible par 10.

3 – Sachant que $N = 5\,460\,999\,706\,120\,583\,177\,327$ est un entier élevé à la puissance 13, on souhaite déterminer sa racine treizième.
Le tableau suivant indique le nombre de chiffres de quelques puissances treizièmes :

n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
nombre de chiffres de n^{13}	14	17	20	21	23	24	24	25	26	27

(a) Déterminer un encadrement de la racine treizième d'un nombre de 22 chiffres.

(b) En déduire la valeur de la racine treizième de N, en exploitant les résultats obtenus aux questions $2 - (c)$ et $3 - (a)$.