

**Session 2020**

**PE2-20-PG6**

*Repère à reporter sur la copie*

**CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES .**

**Deuxième épreuve d'admissibilité**

**Mathématiques**

**Durée : 4 heures  
Épreuve notée sur 40**

Rappel de la notation :

- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

**5 points** au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note **globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.**

Ce sujet contient 11 pages, numérotées de 1 à 11. Assurez-vous que cet exemplaire est complet. S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

*L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.*

*L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.*

***N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.***

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

**PREMIÈRE PARTIE (13 points)**

Dans tout le problème, on considère le triangle ABC rectangle en A, tel que  $AB = 6$  cm et  $AC = 8$  cm.

**PARTIE A : Étude d'une première disposition**

Dans cette partie, trois points I, K et J sont définis de la façon suivante :

- I est un point du segment [AB] ;
- K est le point du segment [BC] tel que (KI) est perpendiculaire à (AB) ;
- J est le point du segment [AC] tel que (KJ) est perpendiculaire à (AC).

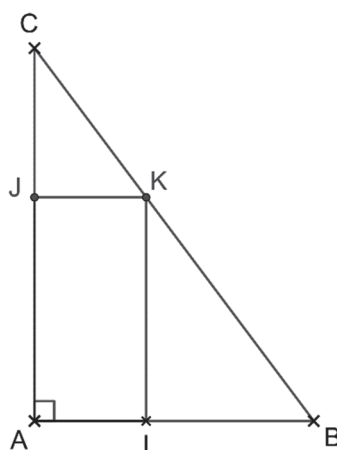


Figure 1

1. Démontrer que AIKJ est un rectangle.
  
2. On se place dans le cas où  $AI = 2,4$  cm.
  - a. Tracer le triangle ABC en vraie grandeur et placer les points I, J et K.
  - b. Montrer que  $IK = 4,8$  cm.
  - c. Calculer l'aire du rectangle AIKJ, en centimètre carré.
  
3. Le point I est mobile sur le segment [AB], la longueur AI est donc variable. On pose  $AI = x$ , où  $x$  est un nombre compris entre 0 et 6.
  - a. Exprimer BI en fonction de  $x$ .
  - b. Montrer que  $IK = 8 - \frac{4}{3}x$ .
  - c. En déduire une expression de l'aire du rectangle AIKJ en fonction de  $x$ .
  - d. Est-il possible de trouver une position du point I sur le segment [AB] pour laquelle AIKJ est un carré ? Justifier la réponse et, si cela est possible, donner la longueur AI correspondante.

## PARTIE B : Étude d'une seconde disposition

Dans cette partie, quatre points I, P, R et Q sont définis de la façon suivante :

- I est un point du segment [AB] ;
- P est le point du segment [BC] tel que (PI) est perpendiculaire à (BC) ;
- R est le point du segment [AC] tel que (RI) est parallèle à (BC) ;
- Q est le point du segment [BC] tel que (RQ) est perpendiculaire à (BC).

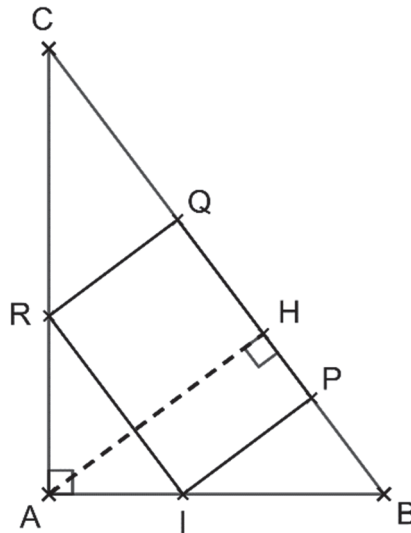


Figure 2

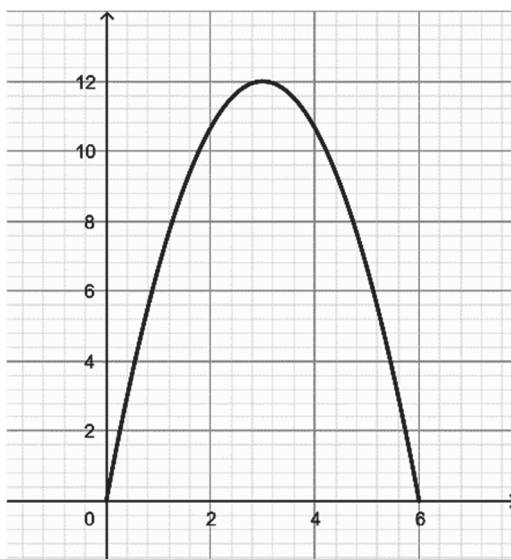
1. Démontrer que IPQR est un rectangle.
2. Calculer BC.
3. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
  - a. Expliquer pourquoi  $\frac{AH \times BC}{2} = \frac{AC \times AB}{2}$ .
  - b. En déduire AH.

Le point I est mobile sur le segment [AB], la longueur AI est donc variable. On pose  $AI = x$ , où  $x$  est un nombre compris entre 0 et 6.

4.
  - a. Démontrer que les droites (IP) et (AH) sont parallèles.
  - b. En déduire que  $IP = 4,8 - 0,8x$ .
5.
  - a. Justifier que  $\frac{IR}{BC} = \frac{AI}{AB}$ .
  - b. En déduire que  $IR = \frac{5}{3}x$ .

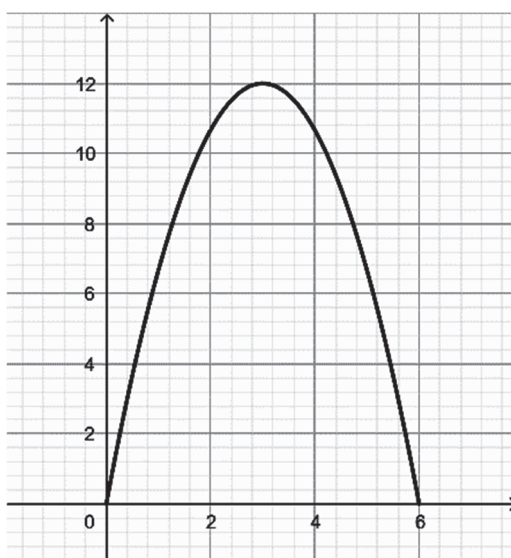
## PARTIE C

1. On a tracé, ci-dessous, la courbe représentative de la fonction  $f$ , qui, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; 6]$ , associe l'aire du rectangle AIKJ, exprimée en centimètre carré (en lien avec la figure 1 de la situation de la partie A).



Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :

- Quelle est l'aire du rectangle AIKJ lorsque  $AI = 2$  cm
  - Pour quelle(s) valeur(s) de  $AI$  l'aire du rectangle AIKJ est-elle égale à  $4 \text{ cm}^2$  ?
  - Pour quelle position du point  $I$  l'aire du rectangle AIKJ est-elle maximale ?
2. On a tracé, ci-dessous, la courbe représentative de la fonction  $g$ , qui, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; 6]$ , associe l'aire du rectangle IPQR, exprimée en centimètre carré (en lien avec la figure 2 de la situation de la partie B).



La comparaison de ces deux courbes laisse penser que, pour un point  $I$  fixé sur le côté  $[AB]$ , les aires des rectangles AIKJ et IPQR sont égales. Ce résultat est-il vrai ? Justifier la réponse.

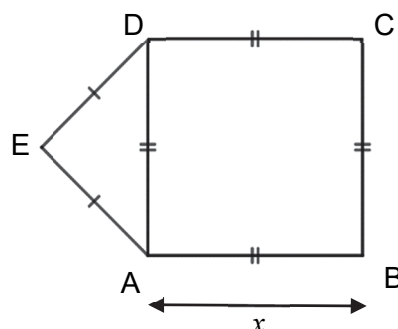
## DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

### EXERCICE 1

Une entreprise veut créer de grands modèles de cartes originales. Elle décide également de produire des enveloppes carrées avec rabat triangulaire selon le modèle ci-contre.

ABCD est un carré ; on note  $x$  la longueur du segment [AB] exprimée en centimètre.



On donne les formules suivantes :

Aire totale de papier d'une enveloppe :  $2,2 \times$  aire ABCD  
Aire totale de papier d'une carte :  $1,8 \times$  aire ABCD

On dispose des documents suivants :

#### Document 1

qualité	Grammage (g/m <sup>2</sup> )
Papier « luxe »	120
Papier « super luxe »	150
Papier cartonné	350

#### Document 2

*Source : La Poste*

Prix du timbre

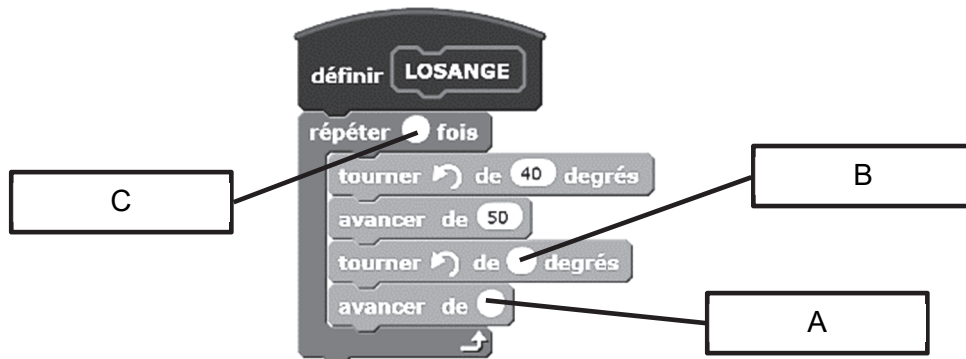
Type de lettre	Délai maximum d'acheminement	Tarifs				
		<i>Poids maximum</i>				
		20 g	100 g	250 g	500 g	3 kg
<b>Ecopli - timbre gris</b>	4 jours (J+4)	0,86 €	1,72 €	3,44 €	-	-
<b>Lettre verte - timbre vert</b>	2 jours (J+2)	0,88 €	1,76 €	3,52 €	5,28 €	7,04 €
<b>Lettre prioritaire - timbre rouge</b>	1 jour (J+1)	1,05 €	2,01 €	4,20 €	6,30 €	8,40 €

1. L'entreprise choisit de fabriquer une enveloppe dont le côté [AB] mesure 20 cm.
  - a. Montrer que l'aire totale de papier nécessaire pour produire la carte et l'enveloppe est de 1600 cm<sup>2</sup>.
  - b. Déterminer le tarif de l'affranchissement de cette carte en tarif « lettre verte – timbre vert » si l'enveloppe et la carte sont fabriquées en papier « super luxe ».

2. L'entreprise choisit du papier « luxe » pour l'enveloppe et du papier cartonné pour la carte.
  - a. Donner en fonction de la longueur  $x$ , exprimée en cm, la masse totale de papier utilisé pour produire l'enveloppe et la carte.
  - b. La masse de papier utilisé pour l'enveloppe et la carte est-elle proportionnelle à la longueur du segment  $[AB]$  ? Justifier.

## EXERCICE 2

1. Le bloc ci-dessous, réalisé sous Scratch, permet de dessiner un losange. Trois nombres A, B et C ont été effacés.
  - a. Expliquer pourquoi le nombre A est 50.
  - b. Justifier que le nombre B est 140.
  - c. Déterminer la plus petite valeur possible pour le nombre C en expliquant.



2. Voici trois figures et trois scripts écrits sous Scratch à l'aide du bloc précédent. Dans chacune des trois figures, le point marqué représente le point de départ du lutin. Associer à chaque figure le script qui permet de l'obtenir, aucune justification n'est attendue.

Figure 1

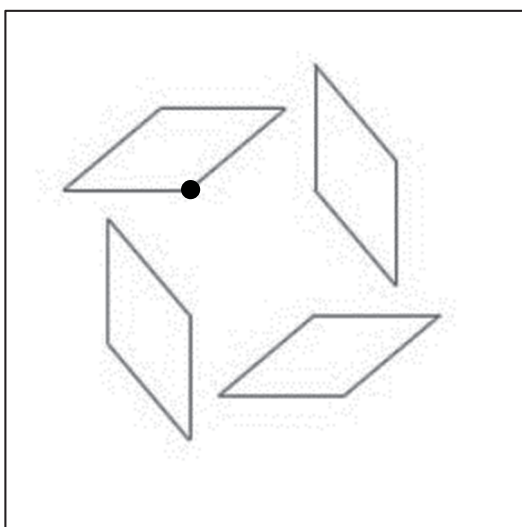


Figure 2

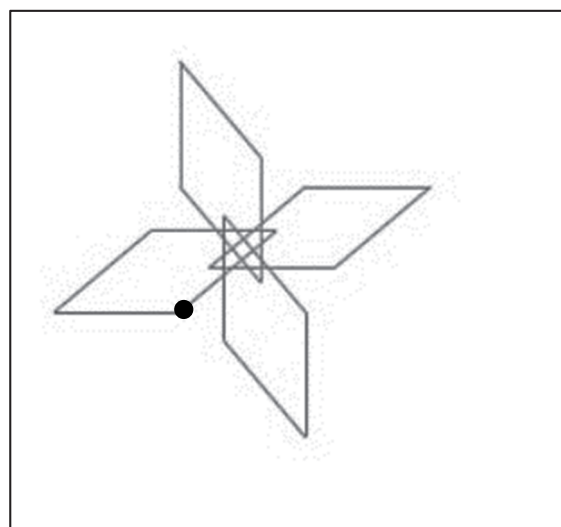
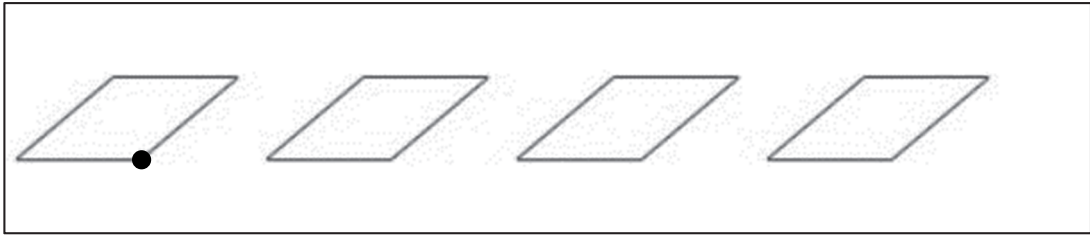


Figure 3



Script A :

```

quand [drapeau] est cliqué
mettre à 30 % de la taille initiale
s'orienter à 90
stylo en position d'écriture
LOSANGE
répéter 3 fois
    relever le stylo
    avancer de 100
    stylo en position d'écriture
    LOSANGE
    
```

Script B :

```

quand [drapeau] est cliqué
mettre à 30 % de la taille initiale
s'orienter à 90
stylo en position d'écriture
LOSANGE
répéter 3 fois
    relever le stylo
    avancer de 50
    stylo en position d'écriture
    tourner de 90 degrés
    LOSANGE
    
```

Script C :

```

quand [drapeau] est cliqué
mettre à 30 % de la taille initiale
s'orienter à 90
stylo en position d'écriture
LOSANGE
répéter 3 fois
    relever le stylo
    avancer de 50
    stylo en position d'écriture
    tourner de 90 degrés
    LOSANGE
    
```

On rappelle :



### EXERCICE 3

Dans une urne, on place les boules suivantes : sur chaque boule sont écrits une lettre et un nombre.

I 14	V 25	E 6	L 8	E 6	S 16	M 10
T 11	H 20	E 6	M 10	A 12	T 11	I 14
U 17	E 6	S 16	V 25	A 12	Q 30	

1. On considère la série statistique composée des nombres écrits sur les boules placées dans l'urne. Calculer l'étendue, la médiane et la moyenne de cette série.
2. On suppose que les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans l'urne.
  - a. Montrer que la probabilité de « tirer un nombre pair » est  $\frac{3}{4}$ .
  - b. Calculer la probabilité de « tirer une voyelle ou un nombre pair ».
  - c. Calculer la probabilité de « tirer une voyelle et un nombre pair ».
3. On tire successivement et sans remise 5 boules. On obtient après les quatre premiers tirages les lettres M, A, T, H. Quelle est la probabilité d'obtenir grâce au cinquième tirage le mot « M A T H S » ?



## TROISIÈME PARTIE (14 points)

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

### SITUATION 1

Un enseignant de CM2 propose les exercices suivants :

#### Exercice 1

*Si j'achète 4 verres, je paie 6 €. Si j'achète 12 verres comme les précédents, combien dois-je payer ?*

Réponse de l'élève :

$$6 \times 3 = 18$$

#### Exercice 2

*On dispose d'un sac de billes identiques.  
On sait que la masse de 3 billes est 51 g et que la masse de 5 billes est 85 g.  
Quelle est la masse de 8 billes ?*

Réponse de l'élève :

$$51 + 85 = 136$$

#### Exercice 3

*Pour préparer un gâteau au chocolat, il faut : 90 g de beurre pour 6 personnes et 120 g de beurre pour 8 personnes.  
Quelle masse de beurre faut-il prévoir pour 20 personnes ?*

Réponse de l'élève :

$$180 + 120 = 300$$

1. Quelle est la notion du programme travaillée dans ces trois exercices ?
2. Pour chaque exercice, analyser la réponse de l'élève et expliciter la procédure utilisée.
3. Expliquer l'intérêt de proposer le troisième exercice après les deux premiers.
4. L'enseignant propose un nouvel énoncé.

#### Exercice 4

*Au marché, 5 kg de cèpes coûtent 100 €. Combien coûtent 2 kg ?*

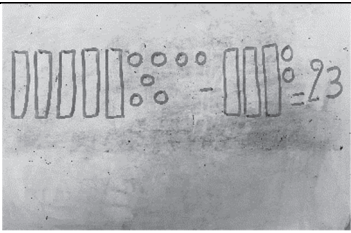
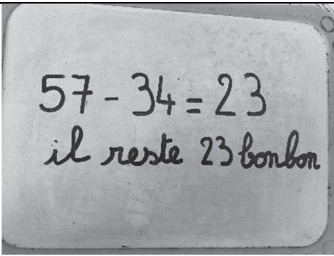
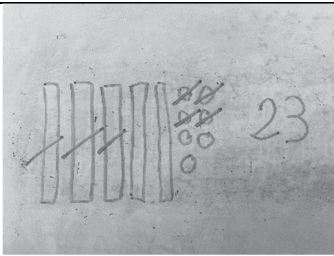
Justifier le choix de ce nouvel énoncé et la procédure encouragée par cet exercice.

## SITUATION 2

Dans le cadre d'une séance de numération, les problèmes suivants sont proposés à des élèves de CP en milieu d'année.

Problème 1 : Camille met 46 bonbons dans la boîte. Thomas en prend 14. <b>Combien en reste-t-il dans la boîte ?</b>
Problème 2 : Camille met 57 bonbons dans la boîte. Thomas en prend 34. <b>Combien en reste-t-il dans la boîte ?</b>
Problème 3 : Camille met 52 bonbons dans la boîte. Thomas en prend 28. <b>Combien en reste-t-il dans la boîte ?</b>
Problème 4 : Camille met 92 bonbons dans la boîte. Thomas en prend 37. <b>Combien en reste-t-il dans la boîte ?</b>

1. Analyser les différentes représentations des élèves pour le problème 2.

Élève A	Élève B	Élève C
		

2. a. À quelle difficulté nouvelle un élève est-il confronté en passant du problème 2 au problème 3 ?  
b. Que va devoir faire l'élève C s'il utilise la même représentation ?
3. Pour le problème 3, l'élève B a répondu :

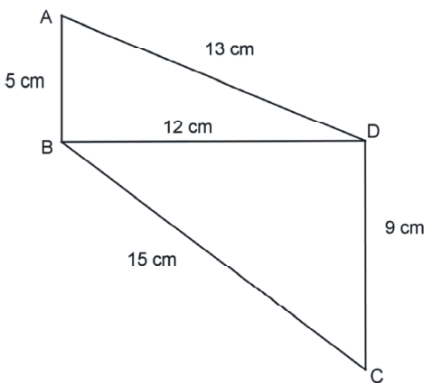
$$52 - 28 = 36$$

Il reste 36 bonbons.

- a. Analyser la réponse de l'élève B.  
b. Quel type d'aide pourrait être apporté par l'enseignant à cet élève ?

### SITUATION 3

1. L'exercice suivant a été proposé dans le cadre d'une évaluation dans plusieurs classes de CM2 d'une même école.

	Le périmètre de la figure ABCD est :
	<input type="checkbox"/> 29 cm <input type="checkbox"/> 66 cm <input type="checkbox"/> 54 cm <input type="checkbox"/> 42 cm

- a. Identifier la compétence visée.
- b. Justifier le choix de chacune des réponses proposées aux élèves.
- c. Pour chacune des trois réponses erronées possibles, proposer une aide à apporter aux élèves concernés pour leur permettre de comprendre leur erreur.
2. Pour une évaluation sur les décimaux, un enseignant souhaite proposer le calcul :
- $$127,31 \times 10$$
- sous forme de QCM avec quatre réponses possibles.
- Proposer une série de quatre réponses au choix, composée de la bonne réponse et de trois distracteurs. Justifier le choix de chacun des trois distracteurs en s'appuyant sur les erreurs fréquentes des élèves.