Ministère de l’éducation nationale et de la jeunesse

Session 2019

PE2-19-PG4
Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

09 avril 2019

Deuxième épreuve d’admissibilité

Mathématiques	**Durée : 4 heures** **Épreuve notée sur 40**

Rappel de la notation :

- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

5 points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note **globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire**.

Ce sujet contient 9 pages, numérotées de 1 à 9. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S’il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L’usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L’usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

N.B : Hormis l’en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d’anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.
Tout manquement à cette règle entraîne l’élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l’épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

PREMIÈRE PARTIE (13 points)

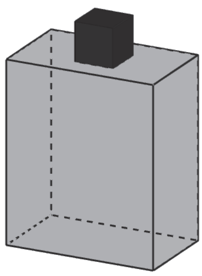
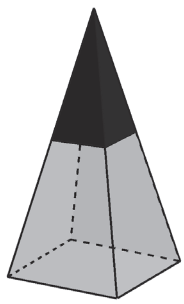
Partie A

Une entreprise souhaite faire fabriquer des flacons pour commercialiser un nouveau parfum. Elle hésite entre trois formes de flacons :

- un flacon de forme parallélépipédique,
- un flacon de forme cylindrique,
- un flacon de forme pyramidale.

1. Étude des volumes des différents flacons

L'entreprise qui fabrique les flacons propose les modèles ci-dessous. On ne s'intéresse ici qu'au volume utile du flacon, c'est-à-dire sans tenir compte du goulot et du bouchon qui ne contiennent pas de parfum.

		
Longueur utile : 5 cm Largeur utile : 3 cm Hauteur utile : 6 cm	Diamètre utile : 5 cm Hauteur utile : 6 cm	Le flacon avec son bouchon est une pyramide régulière à base carrée de 5 cm de côté et de hauteur 11 cm. Le bouchon est une pyramide réduction du flacon, c'est une pyramide régulière à base carrée de côté de longueur 2 cm.

On rappelle les formules suivantes :

Volume d'un parallélépipède rectangle = $aire\ de\ la\ base \times hauteur$

Volume d'un cylindre = $aire\ de\ la\ base \times hauteur$

Volume d'une pyramide = $\frac{aire\ de\ la\ base \times hauteur}{3}$

a. Calculer le volume, en centimètre cube, du flacon de forme parallélépipédique.

b. Calculer le volume du flacon de forme cylindrique. Donner la valeur exacte, en centimètre cube, du volume de ce flacon puis la valeur arrondie à l'unité près de centimètre cube.

c. Vérifier que le volume utile du flacon de forme pyramidale est 85,8 cm^3.

2. Enquête auprès de clients

L'entreprise réalise un sondage auprès de clients afin de savoir quelle forme de flacon est préférée.
Un seul choix est possible parmi les trois formes proposées. Toutes les personnes interrogées ont donné une réponse parmi les trois formes proposées.

Les résultats du sondage sont donnés dans le tableau suivant :

Forme du flacon	parallélépipédique	cylindrique	pyramidale
Nombre de personnes l'ayant choisi	82	109	47

a. Déterminer la proportion de personnes préférant le flacon cylindrique. Exprimer le résultat sous forme d'un pourcentage arrondi à l'unité.

b. L'entreprise souhaite représenter les données du tableau à l'aide d'un diagramme circulaire pour une présentation à ses partenaires.
Déterminer la mesure de l'angle, arrondie au degré près, du secteur représentant le nombre de personnes ayant choisi le flacon de forme cylindrique.

Partie B

L'entreprise de parfum choisit les flacons cylindriques.

1. Conditionnement du parfum

Le parfum est fabriqué dans des cuves contenant 50 litres de parfum puis conditionné dans les flacons. On considère que le volume d'un flacon cylindrique est de 118 cm^3.

Combien de flacons pleins peut-on obtenir avec une cuve ?

2. Étude du coût des flacons

Deux entreprises sont mises en concurrence pour la fabrication des flacons.

Entreprise 1 : chaque flacon est facturé 2,40 €, les frais de livraison sont gratuits.

Entreprise 2 : chaque flacon est facturé 1,80 €, les frais de transport s'élèvent à 2 000 € pour toute commande de 1 à 10 000 flacons.

a. Quel sera le prix de 2 500 flacons commandés à l'entreprise 1 ? Quel sera le prix de 2 500 flacons commandés à l'entreprise 2 ?

b. On appelle f la fonction affine telle que si x est le nombre de flacons commandés, x un nombre entier compris entre 1 et 10 000, alors $f(x)$ est le montant de la commande en euro, selon le tarif de l'entreprise 1. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

c. On appelle g la fonction affine telle que si x est le nombre de flacons commandés, x un nombre entier compris entre 1 et 10 000, alors $g(x)$ est le montant de la commande en euro, selon le tarif de l'entreprise 2. Donner l'expression de $g(x)$ en fonction de x.

d. Tracer sur la copie les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthogonal.
Unités : 1 cm pour 500 unités sur l'axe des abscisses,
1 cm pour 2 000 unités sur l'axe des ordonnées.

e. Déterminer graphiquement à partir de combien de flacons commandés l'entreprise 2 devient la plus avantageuse.

f. Retrouver par le calcul à partir de combien de flacons commandés l'entreprise 2 devient la plus avantageuse.

g. Calculer le montant d'une commande de 7 500 flacons dans l'entreprise la plus avantageuse.

Partie C

L'entreprise envisage d'emballer chaque flacon dans une boîte en aluminium, cylindrique de hauteur 7,6 cm et de diamètre 5,6 cm.

1. Patron de la boîte sans couvercle

Construire un patron de la boîte avec un fond mais sans couvercle. Justifier la construction, en précisant les calculs effectués.

2. Masse de la boîte sans couvercle

On appelle masse surfacique d'une feuille le quotient de sa masse par son aire.
Le patron de la boîte avec un fond mais sans couvercle sera découpé dans une feuille d'aluminium dont la masse surfacique est 810 g/m^2.

a. Calculer l'aire, en cm^2, du patron de la boîte avec un fond mais sans couvercle.
Donner la valeur exacte de l'aire de ce patron puis sa valeur arrondie à l'unité près.

b. Calculer la masse de la boîte avec un fond mais sans couvercle arrondie au gramme près.

DEUXIÈME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1 :

Des paysagistes veulent réaliser un parterre triangulaire avec des tulipes blanches et rouges.
Ils placent trois piquets A, B et C tels que :

- A et B sont distants de 8 m ;
- A et C sont distants de 6 m ;
- B et C sont distants de 10,5 m ;

puis ils tirent des cordes d'un piquet à l'autre.

Ils décident de séparer ce parterre en deux parties. Le long de la corde reliant les piquets A et B, ils placent un piquet D distant de A de 4,8 m. Le long de la corde reliant les piquets A et C, ils placent un piquet E distant de A de 3,6 m. Puis ils tirent une corde entre D et E.

1. Construire une figure qui représente la situation en prenant pour échelle 1 cm pour 1 m.

La corde qui relie les piquets D et E délimite la zone dans laquelle seront plantées des tulipes rouges de celle dans laquelle seront plantées des tulipes blanches.

2. Pour des questions esthétiques, les paysagistes souhaitent que la corde qui relie les piquets D et E soit parallèle à la corde qui relie les piquets B et C.
Cette situation est-elle vérifiée ? Justifier votre réponse.

3. Calculer la distance entre les piquets D et E.

4. Déterminer si l'aire de la zone dans laquelle seront plantées des tulipes rouges est égale à celle de la zone dans laquelle seront plantées des tulipes blanches.

EXERCICE 2 :

Dans tout l'exercice, les dés sont équilibrés.
Un dé cubique possède six faces numérotées de 1 à 6. Lorsqu'on le lance, le nombre comptant pour le score est celui affiché par la face du dessus.
Un dé tétraédrique possède quatre faces numérotées de 1 à 4. Lorsqu'on le lance, le nombre comptant pour le score est celui affiché par la face cachée.

1. Karim et Brigitte s'amusent à lancer simultanément deux dés cubiques. Le score est obtenu en ajoutant les nombres donnés par les deux dés.

a. Karim dit : « Les scores possibles sont 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. On a donc plus de chances d'obtenir un score pair ! ».
Karim a-t-il raison ? Justifier.

b. Brigitte dit : « On a une chance sur trois d'obtenir un score multiple de 3. »
Brigitte a-t-elle raison ? Justifier.

2. Karim et Brigitte s'amusent maintenant à lancer simultanément un dé cubique et un dé tétraédrique. Le score est obtenu **en multipliant** les nombres donnés par les deux dés.

   a. Avec cette nouvelle règle, a-t-on autant de chances d'obtenir un score pair qu'un score impair ?

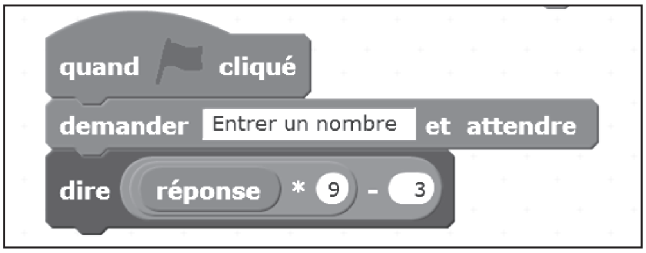
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir un score multiple de 3 ?

EXERCICE 3 :

On dispose des deux programmes de calcul ci-dessous :

Programme A

Programme B



1. Différents nombres sont entrés dans le programme A.

   a. Montrer que quand on entre le nombre 5, la réponse obtenue est le nombre 27.

   b. Quel nombre est obtenu quand on entre le nombre $\frac{7}{10}$? Justifier la réponse.

2. Quel nombre faut-il entrer dans le programme B pour que le résultat affiché soit égal à 0,69 ?

3. Prouver que quand on entre un nombre impair dans le programme B, le nombre obtenu est toujours un multiple de 6.

4. Existe-t-il des nombres qui permettent d'avoir le même résultat affiché avec les deux programmes ? Si oui, déterminer tous ces nombres.

TROISIÈME PARTIE (14 points)

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1 :

Dans une classe de Moyenne Section, par groupes de trois, des élèves jouent avec l'enseignant à un jeu où, à chaque tour, ils prennent le nombre de jetons indiqué par la constellation d'un dé de 1 à 6.

L'enseignant observe les procédures des élèves :

- **Anissa** prend directement le nombre de jetons correspondant à la constellation du dé ;
- **Elvina** prend une poignée de jetons, les organise à l'identique de la constellation du dé puis repose l'excédent sans procédure numérique apparente ;
- quand il obtient 1, 2 ou 3, **Martin** prend le nombre de jetons correspondant ; pour les constellations de 4, 5 ou 6, il compte en posant son doigt sur chaque point de la constellation du dé et prend un jeton.

1. Quelle notion mathématique ce jeu permet-il de travailler ?

2. Conjecturer les stratégies utilisées par chacun des élèves.

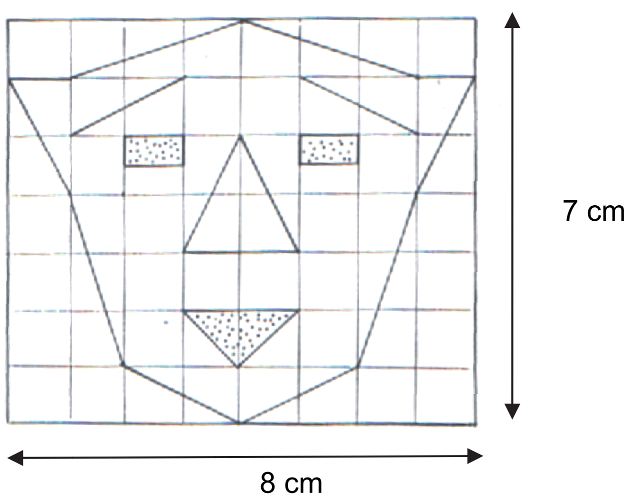
3. Proposer deux modifications du jeu que peut proposer l'enseignant afin de rendre la tâche plus complexe pour Anissa.

4. Proposer une modification du jeu peut proposer l'enseignant pour qu'Elvina mobilise d'autres stratégies.

5. L'enseignant fait évoluer le jeu en proposant deux dés dont les faces sont marquées avec des chiffres de 1 à 3. Les élèves doivent prendre le nombre de jetons correspondants à la somme des deux dés. Que permettrait de faire travailler aux élèves cette nouvelle situation que ne faisait pas travailler la situation avec un dé unique ?

SITUATION 2 :

Un enseignant de cycle 3 propose la situation suivante à ses élèves pour travailler la compétence associée suivante : « Proportionnalité : reproduire une figure en respectant une échelle. ».
Il distribue un masque reproduit sur un quadrillage.



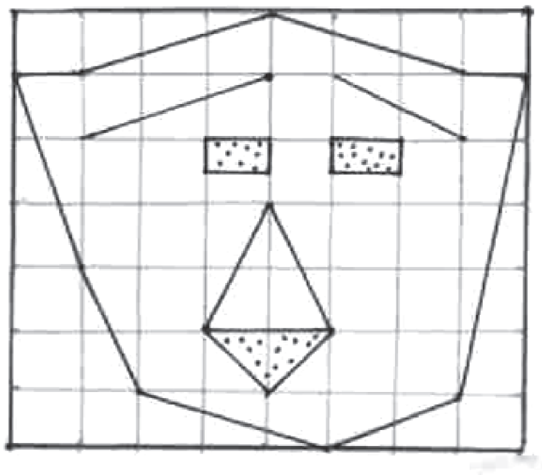
Cette figure n'est pas en vraie grandeur.

Les dimensions du quadrillage d'origine sont indiquées sur la figure ci-dessus : 8 cm sur 7 cm. L'enseignant distribue ensuite une feuille de 24 cm sur 21 cm sur papier uni et donne la consigne suivante :

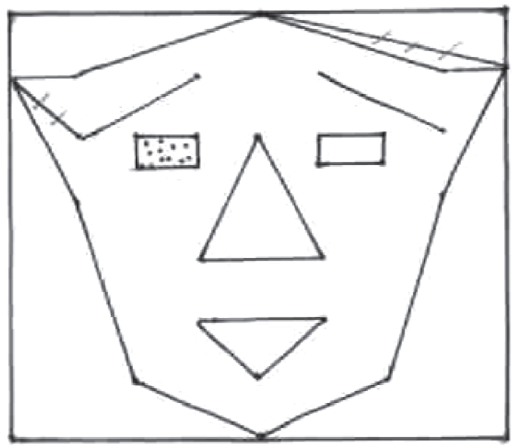
« Observe bien ce masque. Tu dois agrandir ce masque sur une feuille qui mesure 24 cm sur 21 cm. Le masque doit être le plus grand possible sur cette feuille. »

1. L'enseignant choisit de faire reproduire la figure sur papier uni. Quelle est l'influence possible de ce choix sur les procédures des élèves ?

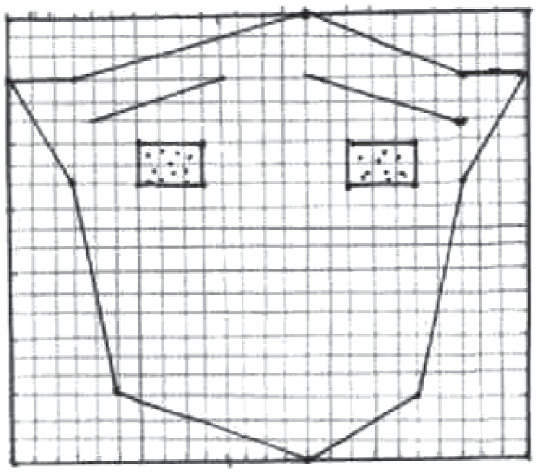
2. Quatre productions d'élèves sont présentées ci-dessous.



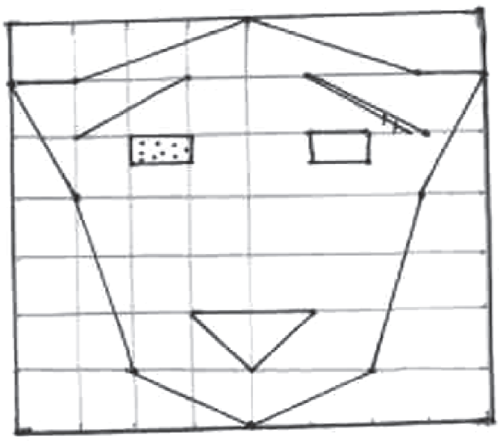
Léon



Manon



Sarah



Amir

a. Décrire la procédure utilisée pour chacun des élèves Manon, Sarah et Amir pour résoudre ce problème.

b. Analyser les réussites et les erreurs que vous pouvez repérer dans chacune des productions de Léon et Sarah.

SITUATION 3 :

Le problème ci-dessous est proposé à des élèves de CM1 :

Une paire de bâtons et une paire de skis coûtent 128 euros. Sachant que les skis coûtent 75 euros de plus que les bâtons, retrouve le prix des bâtons.

D'après un exercice proposé au concours math'isère

Voici les réponses de trois élèves: Leïna, Mathis et Mickaël.

Production de Leïna

$$\begin{array}{r} 128 \\ -\ 75 \\ \hline 53 \end{array}$$

Les bâtons de skis coûtent 53 €.

Production de Mathis

203€ J'ai fait 128 + 75

le prix des bâtons est de 203 €.

Production de Mickaël

$$26,5 + 75 = \begin{array}{r} 101,50 \\ +\ 26,50 \\ \hline 128,00 \end{array}$$

1. **1.** Indiquer en quoi les compétences modéliser et calculer vont être mobilisées dans ce problème.

2. **2.** Analyser chacune des trois productions ci-dessus en repérant les réussites et les erreurs éventuelles.

3. **3.** Indiquer une autre démarche que des élèves de cycle 3 auraient pu entreprendre pour arriver à la solution.

4. **4.** Proposer un schéma que l'enseignant pourrait proposer aux élèves lors de la mise en commun pour aider les élèves à modéliser la situation.