MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Concours de l'enseignement du second degré

Rapport de jury

Concours : CAPES externe
CAFEP-CAPES

Section : mathématiques

Session 2019

Rapport de jury présenté par : Loïc FOISSY
Professeur des universités
Président du jury

Conseil aux futurs candidats

Il est recommandé aux candidats de s'informer sur les modalités du concours.

Les renseignements généraux (conditions d'accès, épreuves, carrière, etc.) sont donnés sur le site du ministère :

http://www.devenirenseignant.gouv.fr/

Le jury du CAPES externe de Mathématiques met à disposition des candidats et des formateurs un site spécifique :

http://capes-math.org/

Les épreuves écrites de cette session se sont tenues les 1 et 2 avril 2019.

Les épreuves orales se sont déroulées du 11 juin au 2 juillet 2019, dans les locaux du lycée Frédéric Chopin de Nancy. Le jury tient à remercier chaleureusement monsieur le proviseur, monsieur le proviseur adjoint et monsieur le directeur délégué aux formations professionnelles et technologiques ainsi que l'ensemble des personnels du lycée pour la qualité de leur accueil. Que soient également remerciés pour leur grande disponibilité les personnels du Département des Examens et Concours de l'académie de Nancy-Metz, ainsi que les services de la Direction Générale des Ressources Humaines qui ont œuvré avec beaucoup de diligence pour que le concours ait lieu dans de bonnes conditions.

Nous tenons à remercier tout particulièrement Messieurs Serge Aubert, François Avril et Yann Hermans pour la conception et la mise en œuvre du système **CAPES**OS, ainsi que pour leur implication sans faille tout au long du concours.

Table des matières

1 Présentation du concours

La forme et les programmes des épreuves du concours sont définis par l'arrêté du 19 avril 2013 fixant les sections et les modalités d'organisation des concours du certificat d'aptitude au professorat du second degré (MENH1310120A). Cet arrêté a été publié :

· au journal officiel de la République française nº 0099 du 27 avril 2013 ;
· sur le serveur SIAC2 dans le guide concours personnels enseignants, d'éducation et d'orientation des collèges et lycées.

2 Quelques statistiques

2.1 Historique

Le nombre de candidats présents aux épreuves écrites, est de nouveau en légère baisse, comme en 2018. Globalement, les effectifs restent comparables à ceux des quatre années précédentes.

L'absentéisme aux épreuves orales est important, comme les années précédentes : 268 candidats sur les 2050 convoqués ne se sont pas présentés, soit un taux d'absentéisme de 13,1 %. Ce fort absentéisme, conjugué à des effectifs en baisse et surtout une inquiétante baisse des notes sur chacune des épreuves écrites ou orales, a conduit le jury à ne pas pourvoir l'ensemble des postes offerts au concours : 972 postes seulement ont été pourvus sur les 1200 offerts, soit 98 de moins qu'en 2018, pour une barre d'admission identique, fixée à 48/120. Un seul candidat a été admis à titre étranger, portant le nombre final d'admis au CAPES à 973.

Concernant le concours du CAFEP, le jury a déclaré admissibles 343 candidats, ce qui a permis de pourvoir les 173 postes mis au concours. On note toutefois une chute importante de la barre d'admission nécessaire pour pourvoir ces postes, qui passe de 56/120 en 2018 à 49,8/120 en 2019, pour des effectifs équivalents.

CAPES	Postes	Inscrits	Présents	Présents/ Inscrits	Admissibles	Admissibles/ Présents	Admis	Admis/ Présents
2019	1200	4563	2139	47%	1706	80%	973	45 %
2018	1183	5074	2263	45%	1760	78%	1070	47%
2017	1440	5249	2306	44%	1942	84%	1066	46%
2016	1440	5373	2288	43%	1870	82%	1137	50%
2015	1440	4645	2205	47%	1803	82%	1097	50%
2014	1243	4268	2327	55%	1892	81%	838	36%
2014e	1592	4763	2454	52%	1903	78%	794	32%
2013	1210	3390	1613	48%	1311	81%	817	51%
2012	950	3194	1464	46%	1176	80%	652	45%
2011	950	2862	1285	45%	1047	81%	574	45%
2010	846	4020	2695	67%	1919	71%	846	31%
2009	806	4243	3160	74%	1836	58%	806	26%
2008	806	4711	3453	73%	1802	52%	806	23%
2007	952	5388	3875	72%	2102	54%	952	25%
2006	952	5787	3983	69%	2043	51%	952	24%
2005	1310	6086	4074	67%	2473	61%	1310	32%

CAFEP	Postes	Inscrits	Présents	Présents/ Inscrits	Admissibles	Admissibles/ Présents	Admis	Admis/ Présents
2019	173	1182	498	42%	343	69%	172	35%
2018	174	1269	567	44%	337	59%	170	30%
2017	176	1318	642	49%	397	62%	176	27%
2016	174	1273	549	43%	410	75%	174	32%
2015	178	1039	495	48%	388	78%	178	36%
2014	151	747	452	61%	342	76%	136	30%
2014e	155	971	493	51%	342	69%	155	31%
2013	105	703	359	51%	272	76%	105	29%
2012	75	736	319	43%	214	67%	75	24%
2011	90	618	276	45%	198	72%	90	33%
2010	155	879	554	63%	308	56%	119	21%
2009	109	901	633	70%	268	42%	109	17%
2008	155	964	631	65%	200	32%	90	14%
2007	160	1019	693	68%	267	39%	123	18%
2006	135	1096	689	63%	283	41%	126	18%
2005	177	1051	644	61%	279	43%	139	22%

Voici une synthèse des résultats, par option et par concours :

CAPES	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Math	3908	1920	1565	907
Info	655	219	141	66
Total	4563	2139	1706	973
CAFEP	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Math	1047	452	318	163
Info	135	46	25	10
Total	1182	498	343	173
CAPES+CAFEP	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Math	4955	2372	1883	1070
Info	790	265	166	76
Total	5745	2637	2049	1146

2.2 Répartition des notes : épreuves d'admissibilité

Les données suivantes concernent les concours du CAPES et du CAFEP réunis. Sauf mention contraire, les notes indiquées sont sur 20.

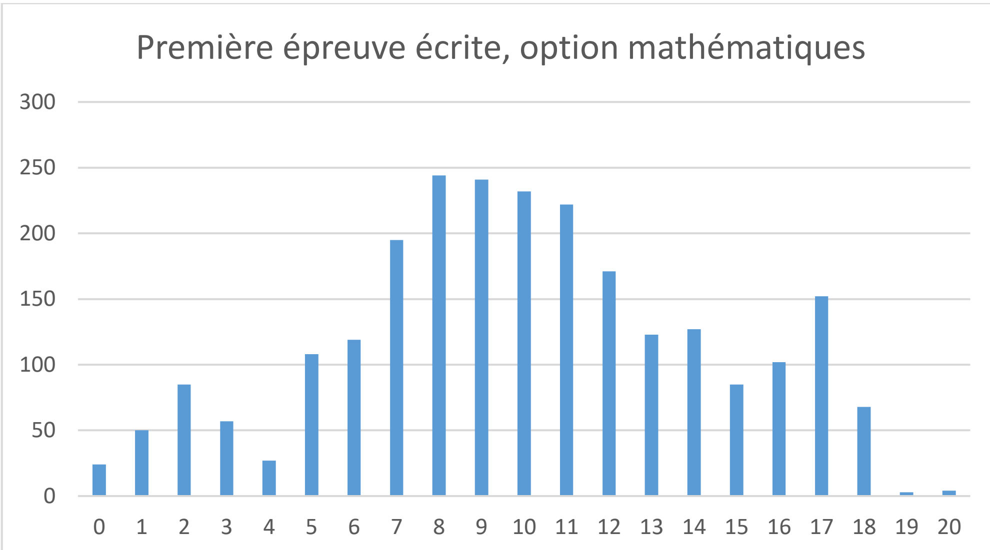
Ont été éliminés :

- 31 candidats ayant obtenu la note 0 à au moins l'une des deux épreuves,
- 96 candidats s'étant présentés uniquement à la première épreuve,
- 15 candidats s'étant présentés uniquement à la seconde épreuve.

La barre d'admissibilité a été fixée à 12,5 sur 40 pour le CAPES et 13 sur 40 pour le CAFEP.

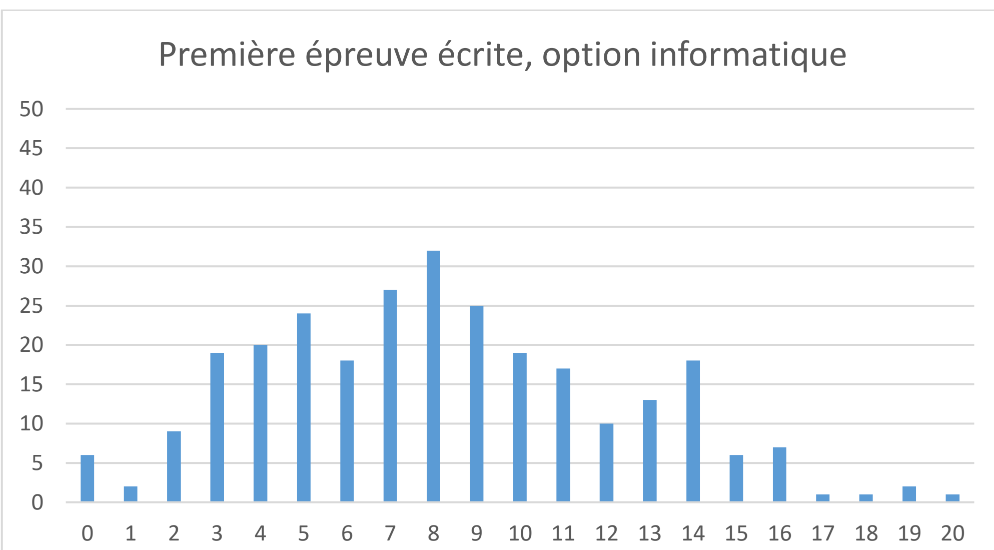
Première épreuve écrite, option mathématiques

Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
9,45	4,31	6,74	9,34	12,42



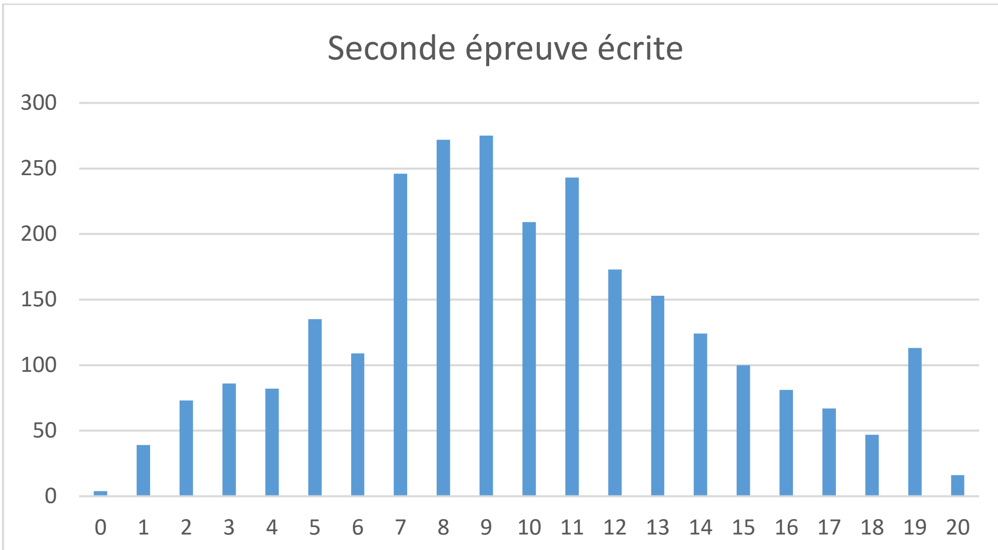
Première épreuve écrite, option informatique

Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
7,70	4,06	4,46	7,45	10,46



Seconde épreuve écrite (commune aux deux options)

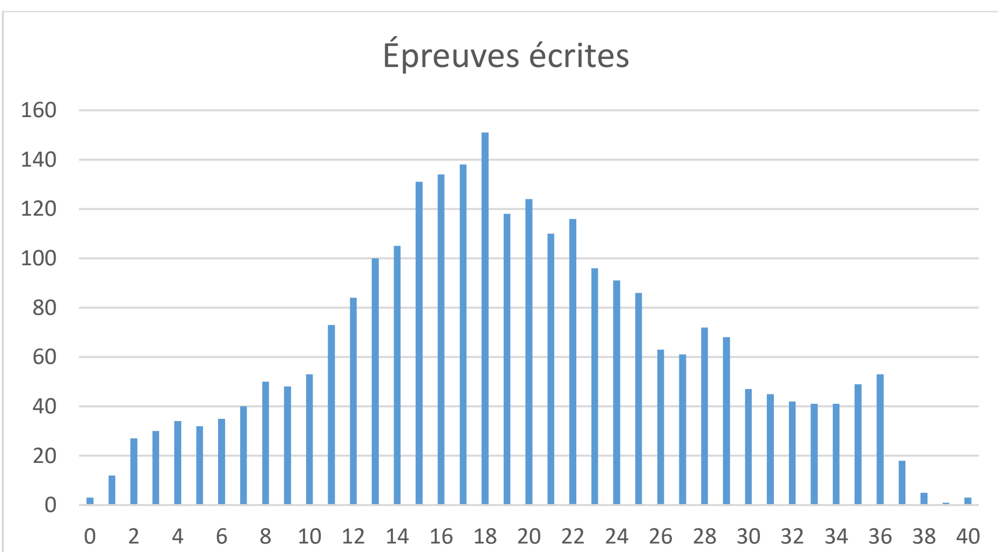
	Moyenne	Écart type	Quartiles		
			Q1	Q2	Q3
Option mathématiques	9,61	4,36	6,77	9,34	12,39
Option informatique	7,74	4,15	4,40	7,46	10,26
Ensemble	9,43	4,37	6,52	9,07	12,22



Le coefficient de corrélation linéaire entre les notes des deux épreuves écrites est 0,88.

Total des épreuves écrites (sur 40)

Moyenne	Écart type	Quartiles		
		Q1	Q2	Q3
18,90	8,32	13,37	18,26	24,54

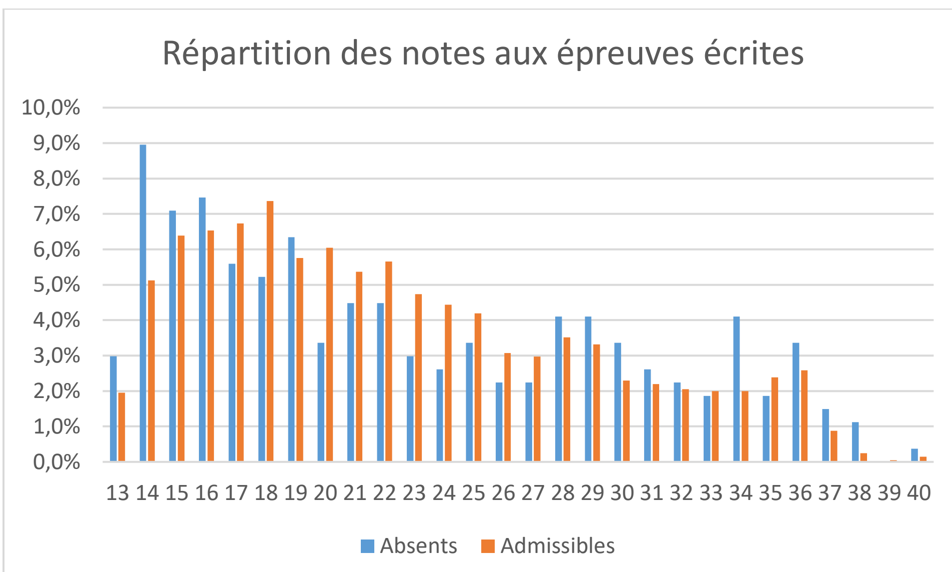


Absents aux épreuves orales

Voici quelques données concernant les candidats admissibles qui ne se sont pas présentés aux épreuves orales, comparés aux candidats admissibles. Le tableau suivant donne quelques indications sur les notes obtenues aux épreuves écrites (sur 40) par ces candidats.

	Admissibles	Admissibles absents aux épreuves orales
Moyenne	22,0	22,3
Ecart-type	6,4	7,3
Premier quartile	16,8	15,7
Médiane	20,8	20,5
Troisième quartile	26,6	28,3
Hommes	63 %	69 %
Femmes	37 %	31 %

Le diagramme suivant présent la répartition des notes obtenues sur l'ensemble des épreuves orales, avec en bleu la population des candidats admissibles qui ne se sont pas présentés aux épreuves orales et en rouge la population des candidats admissibles.



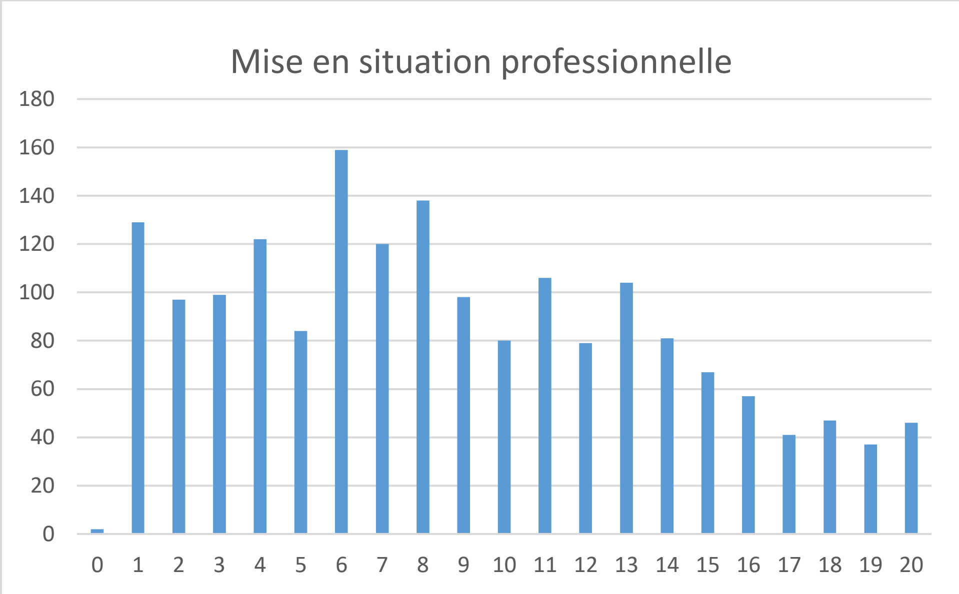
2.3 Répartition des notes : épreuves d'admission

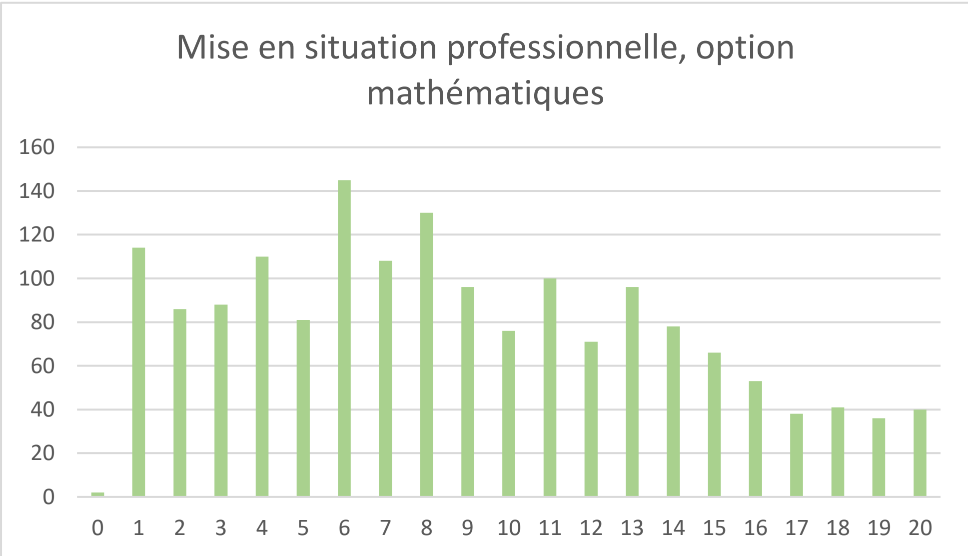
Seuls les 1782 candidats s'étant présentés aux deux épreuves orales sont pris en compte dans les tableaux ci-dessous. Pour le CAPES, le jury a fixé la barre d'admission à 48/120, comme en 2018. Il n'a donc pas été possible de pourvoir les 1200 postes. Pour le CAFEP, les 173 postes ont été pourvus, la note globale du dernier admis étant égale à 49,8/120. Elle était de 56,04/120 en 2018.

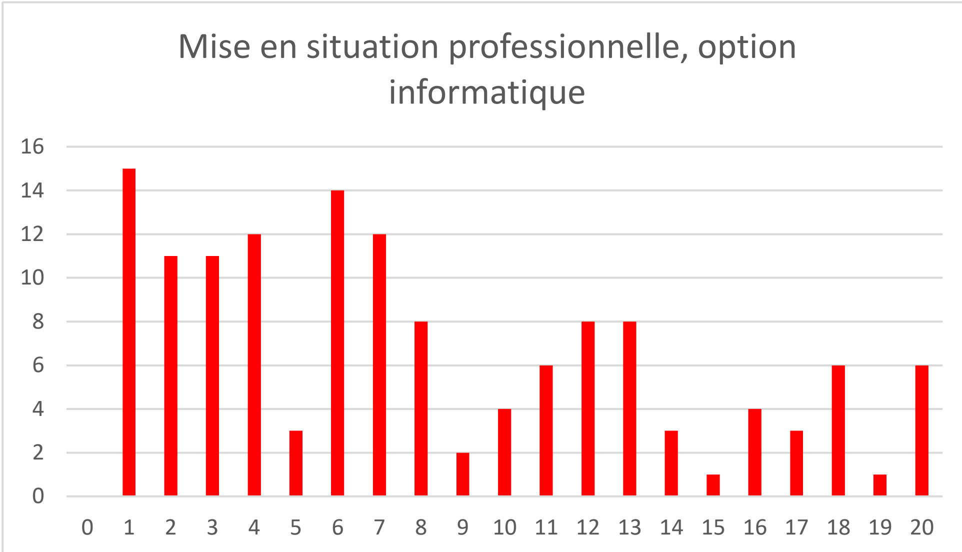
Pour chacune des épreuves orales, on note une chute significative des notes. Par exemple, la moyenne de la première épreuve orale chute de 0,44 points sur 20 et celle de la seconde épreuve orale de 0,6 points sur 20.

Première épreuve orale (mise en situation professionnelle)

	Moyenne	Écart type	Quartiles		
			Q1	Q2	Q3
Option mathématiques	8,58	5,21	4,40	8,00	12,60
Option informatique	7,77	5,68	3,00	6,40	12,00
Ensemble	8,52	5,25	4,00	8,00	12,40

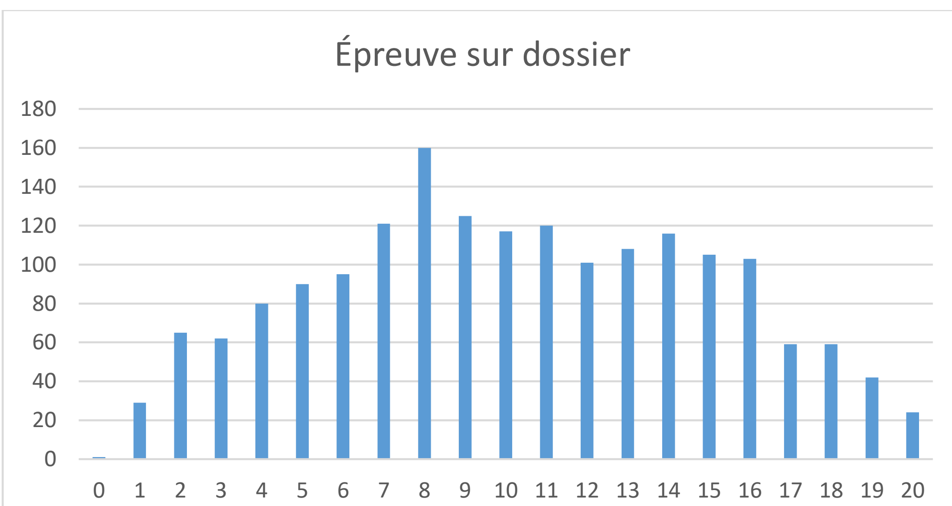


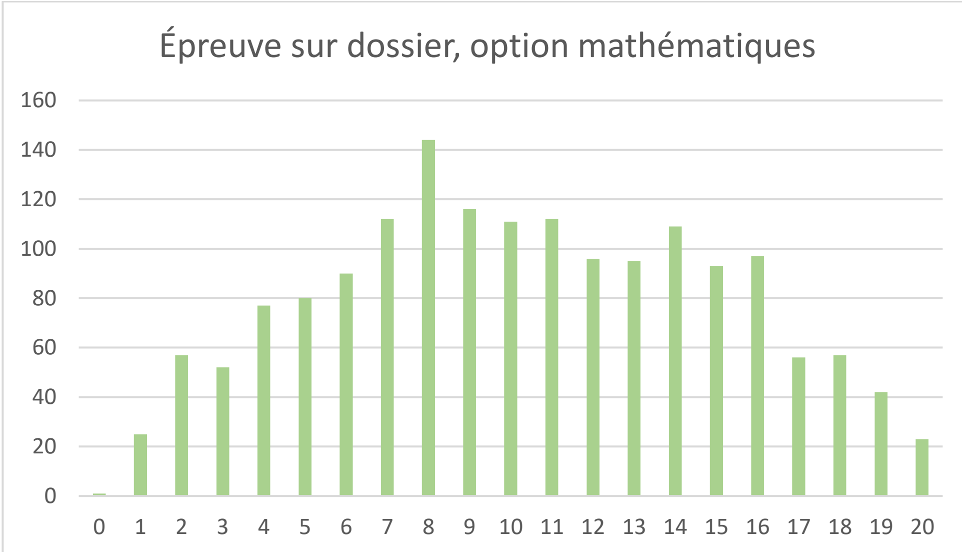


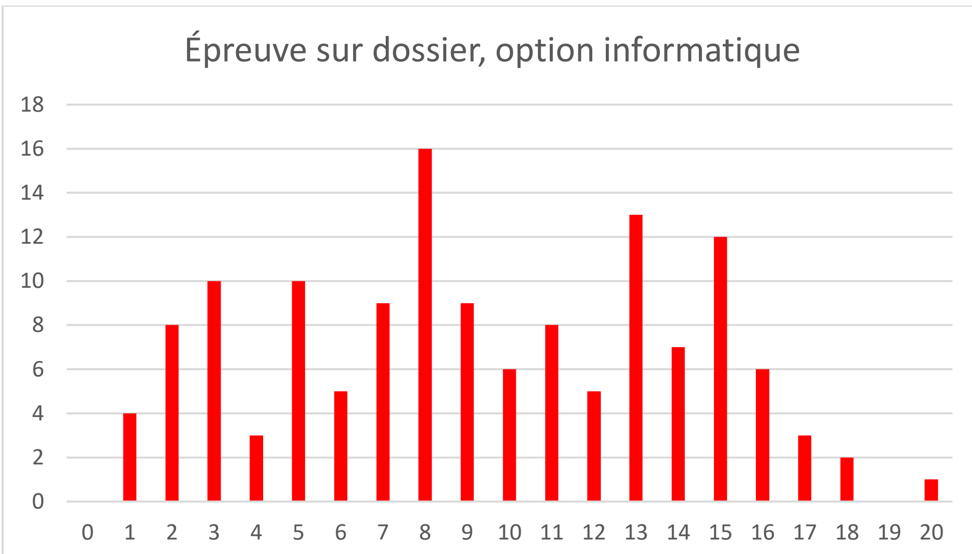


Seconde épreuve orale (épreuve sur dossier)

	Moyenne	*Écart type*	*Quartiles*		
			Q1	Q2	Q3
Option mathématiques	9,82	4,75	6,30	9,62	13,59
Option informatique	8,78	4,66	5,00	8,39	12,74
Ensemble	9,74	4,75	6,20	9,54	13,51



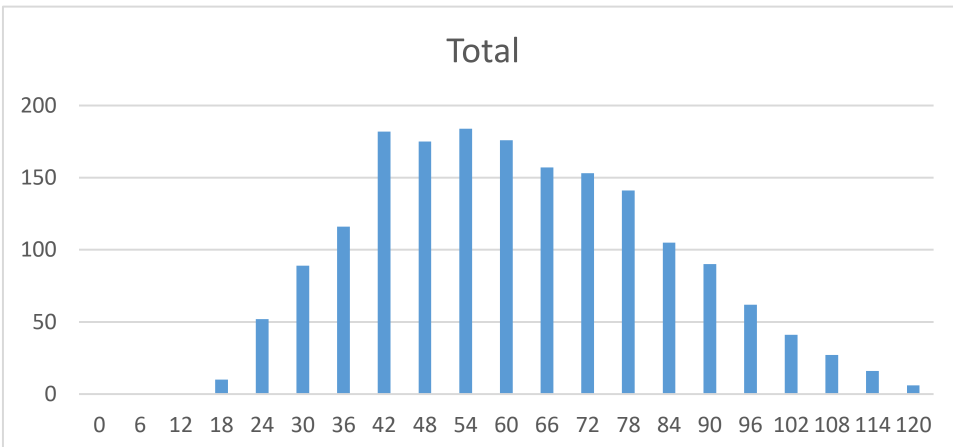

Épreuve sur dossier, option mathématiques
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

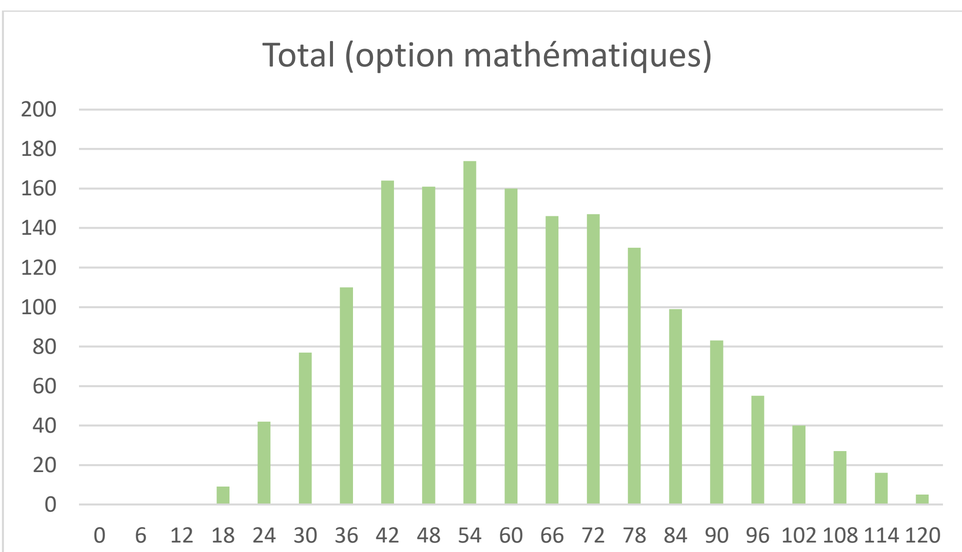

Épreuve sur dossier, option informatique
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

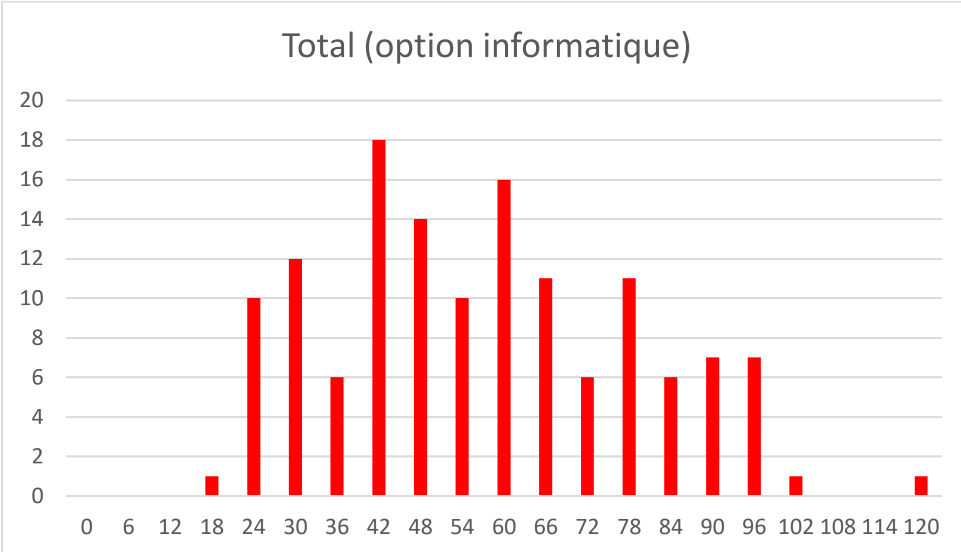
Total des épreuves orales

Les notes suivantes sont sur 120 :

	Moyenne	*Écart type*	*Quartiles*		
			Q1	Q2	Q3
Option mathématiques	58,95	21,26	42,26	57,26	73,13
Option informatique	53,88	21,70	38,13	51,28	70,63
Ensemble	58,56	21,33	41,79	56,89	73,06



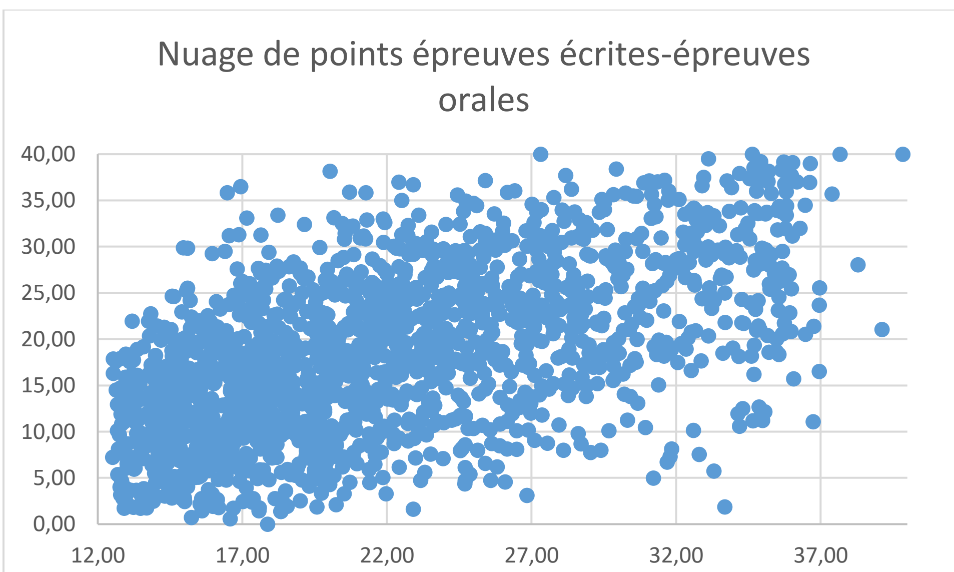




Voici quelques coefficients de corrélation entre les différentes épreuves du concours :

Première épreuve orale-Seconde épreuve orale	0,47
Première épreuve orale-Épreuves écrites	0,49
Seconde épreuve orale-Épreuves écrites	0,48
Épreuves écrites-Épreuves orales	0,56

Sur le nuage de points suivant, le total des points obtenus aux épreuves écrites est en abscisse et le total des points obtenus aux épreuves orales en ordonnée.



2.4 Autres données

Les données suivantes concernent les concours du CAPES et CAFEP réunis. Elles ont été établies à partir des renseignements fournis par les candidats au moment de leur inscription.

	Inscrits		Présents		Admissibles		Admis	
Homme	3450	61%	1641	62%	1286	63%	700	61%
Femme	2194	39%	996	38%	763	37%	446	39%
Total	5644		2637		2049		1146	

Académie	Inscrits		Présents		Admissibles		Admis	
AIX-MARSEILLE	262	4,64%	117	4,44%	87	4,25%	52	4,5%
AMIENS	105	1,86%	53	2,01%	44	2,15%	20	1,7%
BESANCON	79	1,40%	52	1,97%	38	1,85%	24	2,1%
BORDEAUX	224	3,97%	110	4,17%	93	4,54%	53	4,6%
CAEN	115	2,04%	63	2,39%	58	2,83%	31	2,7%
CLERMONT-FERRAND	89	1,58%	49	1,86%	41	2,00%	21	1,8%
CORSE	15	0,27%	8	0,30%	4	0,20%	2	0,2%
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	1405	24,89%	572	21,69%	412	20,11%	215	18,8%
DIJON	71	1,26%	32	1,21%	20	0,98%	12	1,0%
GRENOBLE	210	3,72%	81	3,07%	60	2,93%	42	3,7%
GUADELOUPE	53	0,94%	20	0,76%	8	0,39%	6	0,5%
GUYANE	41	0,73%	19	0,72%	10	0,49%	4	0,3%
LA REUNION	142	2,52%	70	2,65%	50	2,44%	15	1,3%
LILLE	344	6,09%	173	6,56%	137	6,69%	86	7,5%
LIMOGES	58	1,03%	34	1,29%	27	1,32%	13	1,1%
LYON	310	5,49%	157	5,95%	128	6,25%	74	6,5%
MARTINIQUE	41	0,73%	26	0,99%	12	0,59%	8	0,7%
MAYOTTE	25	0,44%	7	0,27%	3	0,15%	0	0,0%
MONTPELLIER	225	3,99%	89	3,38%	73	3,56%	35	3,1%
NANCY-METZ	167	2,96%	90	3,41%	76	3,71%	44	3,8%
NANTES	267	4,73%	135	5,12%	109	5,32%	63	5,5%
NICE	185	3,28%	77	2,92%	67	3,27%	39	3,4%
NOUVELLE CALEDONIE	32	0,57%	17	0,64%	14	0,68%	6	0,5%
ORLEANS-TOURS	142	2,52%	74	2,81%	61	2,98%	39	3,4%
POITIERS	97	1,72%	44	1,67%	33	1,61%	15	1,3%
POLYNESIE FRANCAISE	35	0,62%	20	0,76%	12	0,59%	4	0,3%
REIMS	82	1,45%	48	1,82%	44	2,15%	19	1,7%
RENNES	255	4,52%	134	5,08%	112	5,47%	64	5,6%
ROUEN	122	2,16%	53	2,01%	38	1,85%	24	2,1%
STRASBOURG	150	2,66%	72	2,73%	59	2,88%	33	2,9%
TOULOUSE	296	5,24%	141	5,35%	119	5,81%	83	7,2%
TOTAL	5644	100,00%	2637	100,00%	2049	100,00%	1146	100,0%

PROFESSION	Inscrits		Présents		Admissibles		Admis	
ADJOINT D'ENSEIGNEMENT	10	0,18%	1	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
AG NON TIT FONCT HOSPITAL	3	0,05%	1	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
AG NON TIT FONCT TERRITORIALE	7	0,12%	1	0,0%	1	0,0%	0	0,00%
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	36	0,64%	6	0,2%	3	0,1%	2	0,17%
AGENT ADMI.MEMBRE UE(HORS FRA)	4	0,07%	1	0,0%	1	0,0%	1	0,09%
AGREGE	9	0,16%	5	0,2%	5	0,2%	2	0,17%
AGRICULTEURS	4	0,07%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
ARTISANS / COMMERCANTS	25	0,44%	4	0,2%	2	0,1%	1	0,09%
ASSISTANT D'EDUCATION	123	2,18%	49	1,9%	25	1,2%	6	0,52%
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	493	8,73%	100	3,8%	71	3,5%	36	3,14%

CERTIFIE	52	0,92%	12	0,5%	6	0,3%	0	0,00%
CHAIRE SUPERIEURE	1	0,02%	1	0,0%	1	0,0%	0	0,00%
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	38	0,67%	12	0,5%	10	0,5%	5	0,44%
CONTRACT MEN ADM OU TECHNIQUE	1	0,02%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	902	15,98%	389	14,8%	232	11,3%	92	8,03%
CONTRACTUEL APPRENTISSAGE(CFA)	14	0,25%	4	0,2%	2	0,1%	2	0,17%
CONTRACTUEL FORMATION CONTINUE	3	0,05%	1	0,0%	1	0,0%	1	0,09%
CPE STAGIAIRE	1	0,02%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
ELEVE D'UNE ENS	6	0,11%	3	0,1%	3	0,1%	3	0,26%
EMPLOI AVENIR PROF.2ND D.PRIVE	11	0,19%	5	0,2%	2	0,1%	0	0,00%
EMPLOI AVENIR PROF.2ND D.PUBLI	4	0,07%	3	0,1%	1	0,0%	1	0,09%
ENS.STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC	42	0,74%	13	0,5%	6	0,3%	0	0,00%
ENSEIG NON TIT ETAB SCOL.ETR	16	0,28%	8	0,3%	7	0,3%	3	0,26%
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	39	0,69%	8	0,3%	6	0,3%	2	0,17%
ETUD.HORS ESPE (PREPA CNED)	41	0,73%	21	0,8%	16	0,8%	11	0,96%
ETUD.HORS ESPE (PREPA MO.UNIV)	166	2,94%	120	4,6%	115	5,6%	70	6,11%
ETUD.HORS ESPE (PREPA PRIVEE)	21	0,37%	12	0,5%	7	0,3%	5	0,44%
ETUD.HORS ESPE (SANS PREPA)	321	5,69%	181	6,9%	170	8,3%	96	8,38%
ETUDIANT EN ESPE EN 1ERE ANNEE	991	17,56%	838	31,8%	770	37,6%	534	46,60%
ETUDIANT EN ESPE EN 2EME ANNEE	135	2,39%	92	3,5%	76	3,7%	49	4,28%
FONCT STAGI FONCT TERRITORIALE	1	0,02%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
FONCT STAGIAIRE FONCT PUBLIQUE	5	0,09%	2	0,1%	2	0,1%	0	0,00%
FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE	85	1,51%	30	1,1%	23	1,1%	14	1,22%
INSTITUTEUR	4	0,07%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
INSTITUTEUR SUPPLEANT	2	0,04%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
MAITRE AUXILIAIRE	225	3,99%	109	4,1%	57	2,8%	23	2,01%
MAITRE CONTR.ET AGREE REM MA	11	0,19%	4	0,2%	2	0,1%	1	0,09%
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	1	0,02%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
MAITRE DELEGUE	52	0,92%	28	1,1%	15	0,7%	6	0,52%
MAITRE D'INTERNAT	1	0,02%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
MILITAIRE	14	0,25%	5	0,2%	4	0,2%	2	0,17%
PEPS	1	0,02%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
PERS ADM ET TECH MEN	11	0,19%	3	0,1%	0	0,0%	0	0,00%
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	39	0,69%	14	0,5%	7	0,3%	1	0,09%
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	7	0,12%	2	0,1%	2	0,1%	0	0,00%
PERS FONCT HOSPITAL	8	0,14%	3	0,1%	3	0,1%	0	0,00%
PERS FONCT TERRITORIALE	14	0,25%	3	0,1%	3	0,1%	1	0,09%
PERS FONCTION PUBLIQUE	41	0,73%	8	0,3%	6	0,3%	3	0,26%
PERSONNEL DE DIRECTION	2	0,04%	1	0,0%	0	0,0%	0	0,00%
PLP	62	1,10%	22	0,8%	12	0,6%	4	0,35%
PROF DES ECOLES STAGIAIRE	8	0,14%	4	0,2%	0	0,0%	0	0,00%
PROFESSEUR ASSOCIE 2ND DEGRE	7	0,12%	3	0,1%	3	0,1%	2	0,17%
PROFESSEUR ECOLES	59	1,05%	20	0,8%	13	0,6%	1	0,09%
PROFESSIONS LIBERALES	90	1,59%	25	0,9%	22	1,1%	9	0,79%
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	141	2,50%	29	1,1%	15	0,7%	5	0,44%
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	220	3,90%	60	2,3%	43	2,1%	18	1,57%
SANS EMPLOI	909	16,11%	323	12,2%	245	12,0%	120	10,47%
SURVEILLANT D'EXTERNAT	3	0,05%	2	0,1%	1	0,0%	0	0,00%
VACATAIRE APPRENTISSAGE (CFA)	5	0,09%	1	0,0%	1	0,0%	0	0,00%
VACATAIRE DU 2ND DEGRE	77	1,36%	36	1,4%	23	1,1%	9	0,79%
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	20	0,35%	9	0,3%	8	0,4%	5	0,44%
TOTAL	5644	100%	2637	100%	2049	100,0%	1146	100%

AGE	Inscrits		Présents		Admissibles		Admis	
18-20	1	0,02%	0	0,0%	0	0,0%	0	0,0%
20-24	1199	21,24%	968	45,7%	909	44,4%	631	55,1%
25-29	1296	22,96%	646	30,5%	484	23,6%	253	22,1%
30-34	913	16,18%	336	15,9%	225	11,0%	99	8,6%
35-39	725	12,85%	223	10,5%	138	6,7%	56	4,9%
40-44	616	10,91%	189	8,9%	117	5,7%	51	4,5%
45-49	444	7,87%	128	6,0%	82	4,0%	28	2,4%
50-54	283	5,01%	80	3,8%	50	2,4%	16	1,4%
55-59	129	2,29%	50	2,4%	34	1,7%	10	0,9%
60-64	36	0,64%	16	0,8%	9	0,4%	2	0,2%
65-70	2	0,04%	1	0,0%	1	0,0%	0	0,0%

	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Âge du plus jeune	18,1	20,0	20,0	20,0
Âge du plus âgé	66,8	66,8	66,8	62,0
Age moyen	34,0	30,8	29,5	27,6

3 Analyse et commentaires : épreuves écrites

Les sujets ainsi que les corrigés des épreuves écrites sont disponibles sur le site du jury à l'adresse http://capes-math.org/.

3.1 Première épreuve écrite, option mathématiques

Le sujet de cette épreuve était constitué de deux problèmes. Le premier mêlait algèbre et géométrie. Les premières parties étaient axées sur la représentation des isométries directes du plan euclidien à l'aide des nombres complexes ; les quaternions étaient ensuite introduits sous forme matricielle et utilisés pour paramétrer les isométries directes de l'espace euclidien de dimension 3. Le second problème portait sur l'étude des variables aléatoires suivant une loi géométrique, avec différentes expériences aléatoires décrites à l'aide de séances de tir à l'arc et la notion de taux de panne.

Le jury a été particulièrement attentif aux items suivants :

— **Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu et en déterminer une base**

Pour cet item, il était demandé au candidat de répondre correctement à la question VIII.2 du premier problème. Environ 8,7% des candidats ont répondu correctement à cet item ; 50,8% n'ont pas répondu correctement ou de manière incomplète ; 40,4% n'ont pas abordé cet item. Environ 14,3% des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

— **Décomposer une rotation plane en produit de deux réflexions**

Il s’agissait ici de répondre correctement à la question VII.1 du premier problème. Environ 16,2% des candidats ont répondu correctement à cette question ; 37,1% n’ont pas répondu correctement ou de manière incomplète ; 46,6% n’ont pas abordé cette question. Environ 30,4% des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

— **Utiliser un système complet d’événements pour calculer une probabilité à l’aide de la formule des probabilités totales**

On attendait ici du candidat qu’il rédige correctement la question XI.2 du second problème. Environ 3,7% des candidats ont répondu correctement à cette question ; 19,4% n’ont pas répondu correctement ou de manière incomplète ; 76,9% n’ont pas abordé cette question. Environ 16,0% des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

— **Déterminer un rayon de convergence**

Il s’agissait de répondre correctement à la question II.2 du second problème. Environ 17,6% des candidats ont répondu correctement à cette question ; 36,4% n’ont pas répondu correctement ou de manière incomplète ; 46,1% n’ont pas abordé cette question. Environ 32,5% des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

Certaines compétences ont été régulièrement manifestées par les candidats :

- De façon générale, on constate une amélioration du traitement des raisonnements par récurrence, bien que sur quelques copies les quantificateurs sont encore absents ou utilisés à mauvais escient.

- Les calculs avec le symbole Σ sont la plupart du temps bien menés, bien qu’on trouve encore des calculs utilisant des points de suspension plutôt que ce symbole : on est en droit d’attendre de futurs professeurs de mathématiques qu’ils évitent d’utiliser les points de suspension pour écrire une somme.

- Les notions de base de l’algèbre linéaire sont en général bien maîtrisées et bien utilisées : nombre de candidats savent montrer qu’une partie d’un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, calculer l’inverse d’une matrice ou montrer qu’une application est linéaire.

- La formule de Bayes et la formule des probabilités totales sont souvent connues et bien utilisées, bien que tous les candidats ne prennent pas le soin de préciser que l’on travaille avec un système complet d’événements.

- Les questions géométriques sont souvent illustrées à bon escient par un dessin éclairant le raisonnement mené.

La première question du sujet a été mal comprise par beaucoup de candidats : le jury attendait une démonstration alors que beaucoup de copies se contentaient d’exhiber une formule sans justification. Ceci se reproduit à de nombreuses reprises, par exemple sur la question I.1 du second problème (somme des n premiers termes d’une suite géométrique) où l’on ne pouvait se contenter de dire qu’il s’agit d’une propriété bien connue. On note aussi souvent une confusion entre les points ou les vecteurs du plan et leurs affixes. La preuve que l’ensemble des rotations et des translations du plan forme un groupe a été assez mal réussie : peu de candidats ayant le réflexe de montrer qu’il s’agit d’un sous-groupe du groupe des isométries du plan ou des bijections du plan et beaucoup des preuves proposées étaient, soit redondantes, soit incomplètes. Toujours dans la première partie, l’importance de l’hypothèse $|a|=1$ pour que l’application envoyant le point d'affixe z sur le point d'affixe $az+b$ soit une rotation ou une translation a échappé à beaucoup de candidats.

Dans la partie B du premier problème, portant sur la décomposition d'une rotation en composition de deux réflexions orthogonales, la notion de bissectrice, pourtant très utile ici (question VI.2), n'est quasiment jamais utilisée. Le début de la partie C a mis en difficulté de nombreux candidats, ainsi que le montre le premier item décrit plus haut : peu ont réussi à donner une base de $M_2(\mathbf{C})$ en tant que **C**-espace ou **R**-espace vectoriel ou à montrer complètement que (E,I,J,K) est une base de l'espace de quaternions. L'inversibilité des quaternions non nuls (question X) a donné lieu à des raisonnements surprenants, affirmant par exemple que la somme de matrices inversibles est inversible.

Comme lors de la session précédente, les questions autour des séries entières (partie A du second problème) ont mis en difficulté de nombreux candidats. Si le calcul du rayon de convergence en utilisant la formule de d'Alembert est relativement bien réussi (question II.1), la démonstration de la dérivabilité dans la question II.2 a laissé beaucoup de candidats désarmés : beaucoup écrivent que cette fonction est dérivable car c'est une fonction polynomiale et bien peu semblent connaître les théorèmes sur les séries entières, sans parler de la notion de convergence uniforme.

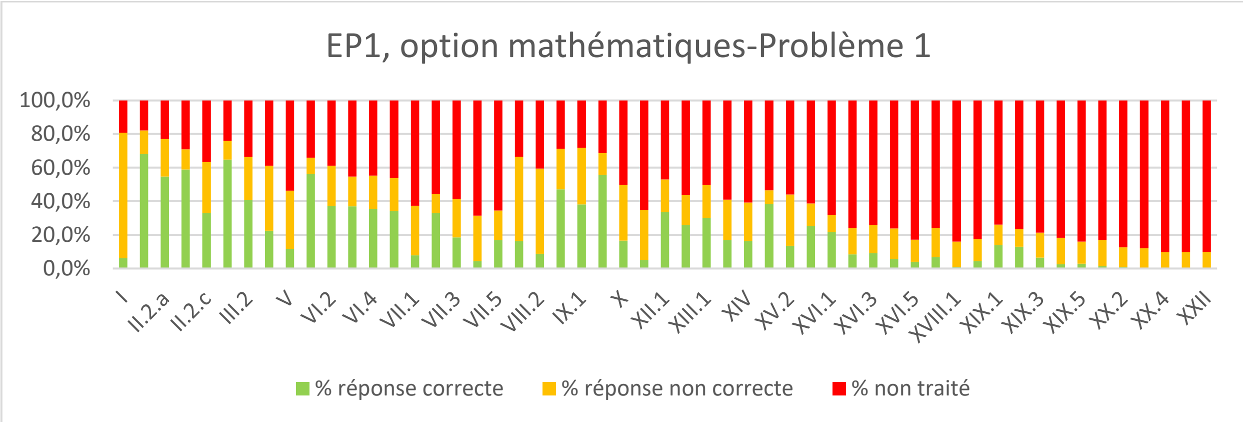
Les probabilités abordées dans les parties suivantes du second problème ont montré certaines lacunes sur le sujet. La notion d'espérance d'une variable aléatoire discrète semble mal comprise : beaucoup de copies oublient de mentionner la convergence absolue de la série donnant l'espérance, voire parfois sa convergence. Les objets considérés sont parfois malmenés et il n'est pas rare de rencontrer dans les copies des sommes ou des produits d'événements et la gestion des unions et intersections d'événements est parfois très confuse. La question VIII a été particulièrement délicate et bien souvent un compteur k a été introduit en oubliant la sommation, ce qui donnait une probabilité dépendant d'un entier k non défini.

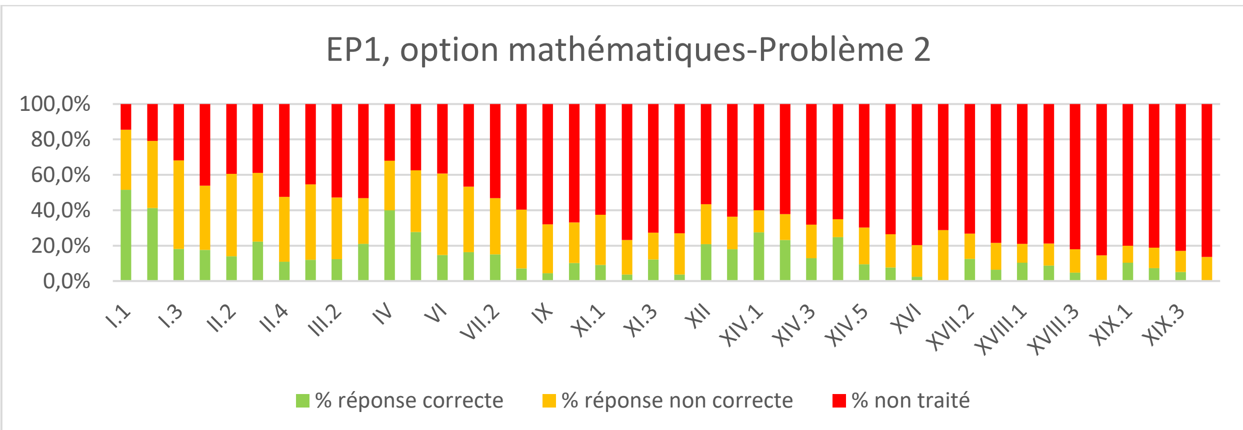
D'une manière générale, rappelons qu'il est souhaité, lorsqu'on utilise un théorème pour démontrer une question, de donner le nom de ce théorème et de montrer que les hypothèses sont vérifiées. De nombreux candidats ont ainsi utilisé la formule des probabilités totales sans le mentionner et sans expliciter que les événements qu'ils considéraient formaient un système complet.

Les symboles d'implication et d'équivalence sont très souvent utilisés à mauvais escient, par exemple comme abréviation pour « donc » ; par contre, ils sont souvent absents lorsqu'ils sont nécessaires, par exemple lors de la résolution d'un système linéaire où le calcul est mené sans aucun lien logique indiqué.

Enfin, si la plupart des copies sont très lisiblement rédigées, certaines auraient mérité plus d'effort sur le soin, l'orthographe et le niveau de langage utilisé : des expressions telles que « donc c'est bon » ou « ok » pour conclure une preuve sont à éviter. Les erreurs de numérotations des questions abordées ou des pages des copies, les questions abordées dans le désordre, l'utilisation du résultat de la question $n+1$ pour démonter la question n ont été souvent relevées : cela peut donner l'impression que le candidat cherche à tromper le correcteur.

Les diagrammes suivants décrivent les résultats obtenus par les candidats, question par question :





3.2 Première épreuve écrite, option informatique

Le sujet de la première épreuve d'admissibilité pour l'option informatique était constitué de deux problèmes.

Le premier problème s'intéressait à l'écriture en base 3 équilibrée des entiers strictement positifs : il s'agit d'une écriture en base 3 avec des chiffres dans l'alphabet {-1,0,1}. La première partie permettait de s'approprier la notation sur quelques exemples. La partie suivante avait pour objectif de montrer l'existence d'une telle écriture, en s'appuyant sur une récurrence faisant intervenir une disjonction de cas. La preuve de l'existence permettait également d'en déduire l'écriture d'une fonction Python calculant cette représentation des entiers. On montrait également l'unicité de la décomposition, à l'aide d'un lemme et d'un nouveau raisonnement par récurrence. La troisième partie décrivait les chemins de Delannoy, ligne brisée constituée de segments orientés par les vecteurs (0,1), (1,0) ou (1,1) et mettait en place la correspondance entre les chemins de Delannoy et l'écriture en base 3 équilibrée, qu'on programmait également en Python.

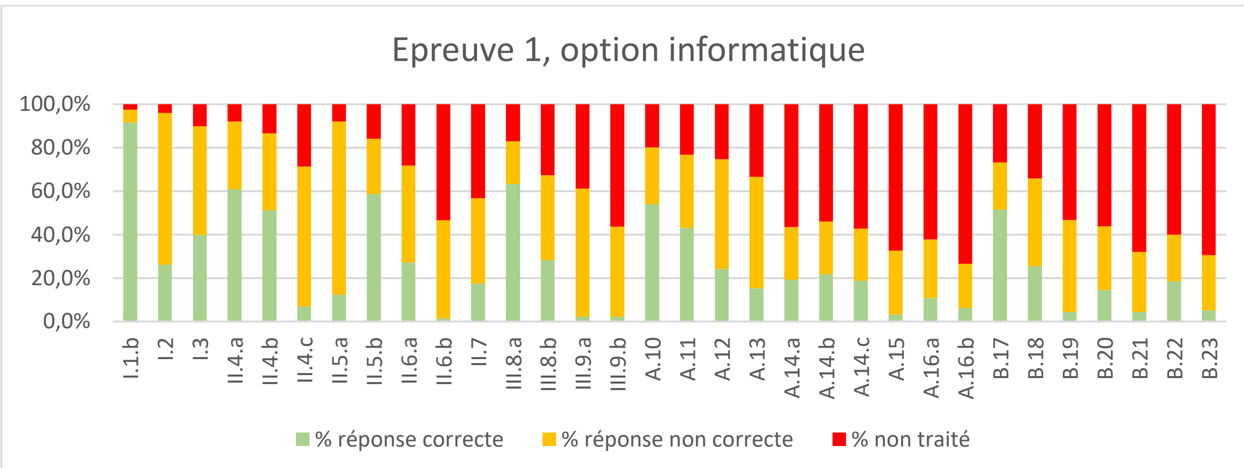
Le deuxième problème s'intéressait aux questions d'ordonnancement : une première partie introduisait la notion d'ordre topologique sur un graphe orienté et proposait l'étude d'un algorithme de construction d'un tel ordre topologique. La partie suivante appliquait le résultat précédent à la question de l'allocation de registres dans la compilation de programmes simples sur un ensemble réduit mais illustratif d'instructions. Enfin une dernière partie faisait le lien avec les graphes de coexistence et la coloration de graphe et se concluait par un algorithme simple de coloriage.

Une grande partie des candidats de cette option maîtrise bien les concepts de base de l'algorithmique et de la programmation abordés par les deux problèmes ainsi que la syntaxe de Python, y compris dans le cas de listes de listes, même si certains n'arrivent pas à proposer un code clair et concis. Les candidats ont en général beaucoup de difficultés à aborder les questions de complexité des algorithmes, même dans des cas simples.

De même, le jury regrette que comme l'année dernière la rédaction correcte des récurrences ne soit pas maîtrisée de la majorité des candidats, qui ne semblent pas distinguer récurrence faible et récurrence forte. Toutes les questions demandant un raisonnement complet (en opérant soigneusement une disjonction de cas, en distinguant existence et unicité) semblent présenter d'importantes difficultés pour nombre de candidats.

On peut également regretter que dans un concours de recrutement de professeurs de mathématiques le calcul de la somme des termes d'une suite géométrique semble constituer une réelle difficulté.

Le diagramme suivant décrit les résultats obtenus par les candidats, question par question :



3.3 Seconde épreuve écrite

Le sujet de la **deuxième épreuve d'admissibilité** est composé de deux problèmes indépendants.

Le premier problème porte sur les fonctions logarithmes. Il est composé de trois parties.

La partie A amène les candidats à justifier l'existence et l'unicité de fonctions logarithmes de base a définies comme solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{a}{x}$ avec $a \in \boldsymbol{R}$ et $y(0) = 1$, à démontrer leurs propriétés algébriques et à en faire l'étude. La partie B, qui peut être une activité de classe proposée en lycée, concerne le cas du logarithme décimal. Il s'agit de mettre en œuvre des propriétés algébriques dans trois situations contextualisées. Enfin, la partie C s'intéresse à deux méthodes d'approximation de $ln(2)$ et $ln(3)$ puis à une approximation de $ln(n)$ pour un entier $n > 1$.

Le second problème, composé de trois parties, porte sur une loi de composition interne dans **Q** $^+$: « la somme des cancres » et sur les suites de Farey.

La partie A étudie certaines propriétés de cette loi de composition interne, définie sur **Q** $^+$**,** de la façon suivante : deux fractions irréductibles $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ de **Q** $^+$ étant données, $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. La partie B permet de déterminer le nombre d'éléments constituant la suite Farey d'ordre n, définie comme la suite des fractions irréductibles entre 0 et 1 rangées dans l'ordre croissant, dont le dénominateur est inférieur ou égal à n.

Enfin, x et y étant deux termes consécutifs de cette suite, la partie C permet de construire la première fraction apparaissant entre x et y dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à n.

Ces deux problèmes permettent d'apprécier, outre les qualités scientifiques des candidats, leur aptitude à se placer dans une optique professionnelle, notamment avec des références explicites aux pratiques d'un élève de terminale scientifique (problème 1, B.XII).

Le jury a prêté une attention particulière aux compétences suivantes.

— **Limites de la fonction ln aux bornes de son domaine (problème 1)**

Environ 4 % des candidats ont répondu correctement à cette question ; environ 76,6 % des candidats n'ont pas répondu correctement à cette question ou de manière incomplète ; environ 19 % des candidats n'ont pas abordé la question. Environ 5,3 % des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

— **Applications des propriétés de la fonction logarithme décimal (problème 1) :**

En arithmétique (nombre de chiffres d'un entier en numération décimale)

Environ 17,4% des candidats ont validé cet item (question B XII 1.) ; 32,1% des candidats n'ont pas validé cet item ou de manière incomplète ; environ 50,5 % des candidats n'ont pas traité cette question. Environ 35,1% des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

Dans une situation contextualisée (intensité sonore)

Environ 12,1 % des candidats ont validé cet item (question B XII 2b.) ; 55,7 % des candidats n'ont pas validé cet item ou de manière incomplète ; environ 32,2 % des candidats n'ont pas traité cette question. Environ 17,9 % des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

Dans une situation contextualisée (suite géométrique)

Environ 17,7 % des candidats ont validé cet item (question B XII 3.) ; 42,2 % des candidats n'ont pas validé cet item ou de manière incomplète ; environ 40,1 % des candidats n'ont pas traité cette question. Environ 29,5% des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

— **Arithmétique : propriété d'égalité de deux PGCD (problème 2)**

Environ 18,9 % des candidats ont répondu correctement à la question (question A I.) ; environ 43,8 % des candidats n'ont pas répondu correctement à la question ou de manière incomplète ; environ 37,3 % des candidats n'ont pas abordé la question. Environ 30,1 % des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

— **Logique : établir une équivalence (problème 2)**

Environ 21,4 % des candidats ont répondu correctement à la question A IV 1. ; environ 57,6 % des candidats n'ont pas répondu correctement à la question ou de manière incomplète ;

environ 21 % des candidats n'ont pas abordé la question. Environ 27,1 % des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

— **Logique : raisonnement par l'absurde (problème 2)**

Pour valider cet item, il était attendu que le candidat réponde correctement à l'une des questions suivantes : C XIII 1. 2. ou 3. ou C XIV 2c. ou 2h. Environ 11,5 % des candidats ont validé cet item ; environ 13,8 % des candidats n'ont pas validé cet item ou de manière incomplète ; environ 74,7 % des candidats n'ont traité aucune des questions examinées. Environ 45,5 % des candidats ayant abordé cette question y ont répondu correctement.

Dans l'ensemble des copies, des compétences ont été régulièrement manifestées comme la mise en œuvre de raisonnements par récurrence, la maîtrise du calcul intégral, la preuve d'une équivalence par double implication ou les propriétés des séries alternées.

En revanche, d'autres compétences révèlent un degré de maîtrise insuffisant, comme en témoignent les maladresses ou erreurs suivantes : la confusion entre f et $f(x)$, le manque de rigueur dans les calculs avec des inégalités, l'oubli de vérifications liées aux existences de limite, de primitive…, le recours à des propriétés sans vérifier les hypothèses, l'absence ou l'utilisation erronée de quantificateurs. Les enchaînements logiques entre deux assertions ou entre deux inégalités ainsi que le passage à la limite dans une inégalité… sont souvent absents ou traités de façon peu rigoureuse. De même, les symboles ⇔ ou ⇒ sont souvent utilisés avec légèreté et de manière non maîtrisée, le symbole ⇒ étant parfois confondu avec « donc ».

De plus, le jury déplore le manque de soin de certaines copies : écriture illisible, fautes d'orthographe, absence de numérotation et un manque de rigueur dans les notations mathématiques.

Problème 1

Beaucoup de candidats n'ont pas compris que l'objectif de la partie A était de démontrer, à partir de la définition donnée, l'existence, l'unicité et certaines propriétés des fonctions logarithmes de base *a*, sans avoir recours aux propriétés connues de la fonction logarithme népérien. Dans la question A I, si l'unicité est bien justifiée, de nombreux candidats n'ont pas établi l'existence. Par ailleurs, la condition d'existence d'une primitive d'une fonction sur un intervalle semble mal connue. De même, la dérivabilité de la fonction $x \mapsto f_a(xy)$ est très peu voire pas du tout mentionnée ni justifiée. Concernant la limite en $+\infty$ de la fonction ln, trop de candidats affirment qu'une fonction croissante et positive admet comme limite $+\infty$ en $+\infty$. Enfin, en A VIII, l'argument de continuité est peu mis en avant pour justifier la bijection.
Concernant la partie B, un nombre significatif de candidats ne prennent pas en compte le fait que la rédaction doit être accessible à des élèves de terminale, cette rédaction devant pour autant rester précise et rigoureuse. À la question B XII 3., une modélisation par une suite géométrique est attendue mais ne semble pas maîtrisée.
Dans la partie C, si les candidats montrent une maîtrise satisfaisante du calcul intégral, l'encadrement d'une somme par des intégrales ainsi que les majorations d'intégrales ne sont pas correctement traités (non prise en compte de l'ordre des bornes). Plusieurs candidats ont manipulé des sommes infinies sans prendre de précaution. Par ailleurs, des raisonnements par récurrence (bien rédigés) ont été utilisés quand il était possible de s'en passer. Enfin, les dernières questions concernant les approximations de $ln(2)$, $ln(3)$ et $ln(n)$ ont été très peu abordées.

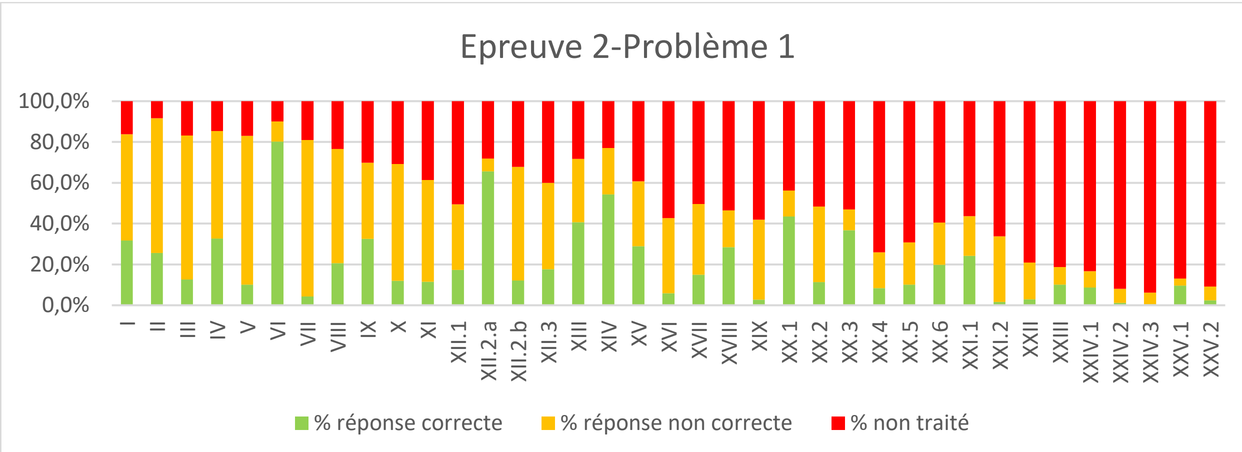
Problème 2

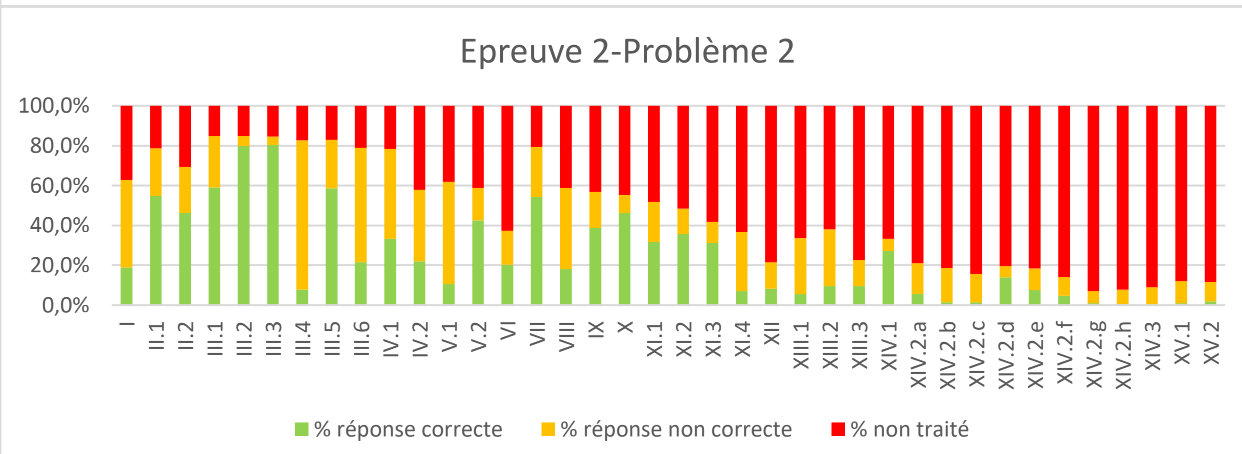
Le problème 2 débute par une démonstration classique et élémentaire de terminale spécialité mathématiques qui a pourtant été très mal réussie et non traitée par 40 % des candidats. Beaucoup se sont contentés de montrer que : $pgcd\ (a\ ;\ b)$ divise $pgcd\ (a\ ;\ a+nb)$. Concernant la *somme des cancres*, la question III a été globalement bien réussie même si le recours à des contre exemples reste inégal d'un candidat à l'autre. En revanche, le caractère irréductible des FFI (Formes Fractionnaires Irréductibles) n'a pas été suffisamment pris en compte et exploité, des candidats ne faisant pas la différence entre une écriture fractionnaire et la FFI. En fin de partie A, le traitement des questions de géométrie révèle la méconnaissance des candidats relative aux droites remarquables du triangle : confusion entre médiatrice, hauteur, médiane…

Dans la partie B, la première question consistant à donner les premières suites de Farey a été plutôt bien réussie excepté certains candidats qui n'ont pas rangé les fractions dans l'ordre croissant. Dans la question VIII, le sens direct de l'équivalence a été bien mieux traité que la réciproque.

La partie C, hormis quelques questions triviales (XIV 1., par exemple), a été très peu abordée.

Les diagrammes suivants décrivent les résultats obtenus par les candidats, question par question :





La réussite aux **épreuves écrites** nécessite que la préparation des candidats prenne en compte les éléments suivants :

• maîtriser et énoncer avec précision, lorsqu'elles sont utilisées, les connaissances mathématiques de base, indispensables à la prise de recul sur les notions enseignées ;

• rédiger clairement et de manière rigoureuse une démonstration simple, qui sera une composante essentielle du métier de professeur de mathématiques ;

• exposer avec toute la précision voulue, en mentionnant clairement les étapes successives, les raisonnements, plus particulièrement ceux qui relèvent du collège ou du lycée.

On rappelle aussi l'importance du respect des notations, de la nécessité de conclure une argumentation, mais aussi l'intérêt de la lisibilité d'une copie.

4 Analyse et commentaires : épreuves orales

Les épreuves orales visent à apprécier les qualités des candidats en vue d'exercer le métier d'enseignant. Il s'agit non seulement de faire la preuve de ses compétences mathématiques, mais également de montrer sa capacité à les transmettre, à en illustrer la portée par des exemples bien choisis et, plus généralement, à susciter l'intérêt des élèves pour la démarche scientifique. Compte tenu de la complexité du métier d'enseignant, les attentes du jury sont multiples et l'évaluation des candidats prend en compte des critères nombreux et variés. Une certaine connaissance des programmes, une bonne gestion du temps, une élocution claire, un niveau de langue adapté et une attitude d'écoute sont des atouts essentiels. Le niveau mathématique et les qualités de communication, qui ne peuvent être considérés séparément, jouent un rôle déterminant dans la note attribuée. Lors de l'évaluation de ces épreuves orales, le jury est plus particulièrement attentif aux critères suivants :

- Maîtrise (compétences mathématiques)
- Organisation et clarté (compétences pédagogiques)
- Pertinence et niveau (compétences mathématiques et pédagogiques)
- Réactivité (compétences mathématiques et professionnelles)

Les recommandations formulées dans les rapports du jury des dernières sessions demeurent largement valables. Comme pour tout concours, une préparation soigneuse de chacune des épreuves en amont de celles-ci est indispensable et reste le meilleur gage de réussite.

4.1 Mise en situation professionnelle

La première épreuve orale d'admission est l'épreuve de mise en situation professionnelle. Le candidat choisit un sujet de leçon, parmi deux qu'il a tirés au sort. Après un temps de préparation d'une durée de deux heures et demie, le candidat passe une épreuve orale d'une durée maximale d'une heure devant trois membres du jury. Cet oral débute par l'exposé d'un plan d'étude détaillé et argumenté de la leçon choisie (d'une durée maximale de vingt minutes), se poursuit par le développement par le candidat d'une partie de ce plan choisie par le jury et s'achève par un entretien avec le jury portant sur ce développement ou sur tout autre aspect en lien avec le sujet.

Les attentes du jury sont définies par le texte de l'arrêté définissant les épreuves d'admission qu'il convient de connaître. Lors de cette première épreuve, est évaluée la capacité du candidat à maîtriser et à organiser les notions mathématiques correspondant au thème proposé par le sujet, à les exposer avec rigueur, clarté et précision dans un langage adapté (tant au niveau de la langue française que du langage mathématique) et à répondre de façon convaincante aux questions du jury qui portent sur des aspects mathématiques, didactiques et pédagogiques, en faisant preuve d'une bonne aisance au niveau du fond (aptitudes mathématiques) comme de la forme (aptitudes de communication). La posture adoptée par le candidat doit naturellement exclure l'arrogance, la provocation et l'impatience. Une très bonne maîtrise de la langue française, tant à l'écrit qu'à l'oral, est attendue des candidats. Les éléments qui viennent d'être évoqués entrent pour une part importante dans l'évaluation.

Quelques remarques et conseils de préparation et de passation de l'épreuve

- *Concernant le niveau auquel se situe l'exposé du candidat*

L'épreuve de mise en situation professionnelle prend appui sur les programmes de mathématiques du collège et de toutes les séries du lycée général et technologique. Le niveau auquel se situe l'exposé est laissé au libre choix du candidat et il n'est pas attendu que les contenus abordés soient transposés pour être adaptés au programme de telle ou telle classe. En revanche, il est rappelé que les notions présentées doivent être abordées par le candidat avec un recul correspondant au niveau M1 du cycle master. À titre d'exemple, sur la leçon 21 (*Proportionnalité et linéarité*), au-delà de calculs de pourcentages, d'échelles et de proportions dans une recette de cuisine présentés au niveau du collège, l'exposé ou l'entretien doit déboucher sur une mise en perspective du concept de linéarité dans le cadre d'une dimension supérieure ou égale à 2. De même, sur la leçon 30 (*Suites numériques. Limites*), le candidat peut s'attendre à être interrogé sur la convergence d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec u_0 donné.
Le développement ou l'entretien avec le jury peut également déboucher sur une démonstration en lien avec le thème de la leçon, même si cette démonstration n'est pas exigible des élèves du secondaire. À titre d'exemple, ont pu être demandées une démonstration du théorème de Thalès ou de Pythagore, ou de leur réciproque, une démonstration du théorème des valeurs intermédiaires, le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale ou la démonstration d'une caractérisation des triangles semblables.

Même si les programmes de la série scientifique du lycée général abordent un grand nombre de contenus, ceux-ci ne couvrent pas toutes les notions mathématiques du programme. Prenant appui sur d'autres programmes (par exemple de la série ES ou de la voie technologique), certaines leçons abordent des notions comme la convexité, les séries statistiques à deux variables, la théorie des graphes, les taux d'évolution ou les équations différentielles. Quand cela s'avère possible, il est pertinent de mettre en perspective une même notion sur différents niveaux de classe (par exemple, dans la leçon intitulée *Périmètres, aires, volumes,* il est apprécié que le candidat fasse appel au calcul intégral pour démontrer des formules admises au niveau du cycle 4 (volume d'une sphère ou d'un cône de révolution). Il en est de même de la leçon intitulée *Problèmes de constructions géométriques* qui, si elle permet d'illustrer des notions de géométrie du collège (droites remarquables d'un triangle), peut s'ouvrir sur la géométrie vectorielle avec des constructions relevant d'un niveau supérieur.

- *Concernant la présentation de l'exposé*

Le support de l'exposé du plan détaillé est laissé au libre choix du candidat : présentation intégralement écrite au tableau, diaporama vidéo projeté, présentation alternant l'utilisation du tableau et celle d'un diaporama, illustrations réalisées à l'aide d'outils logiciels. Il n'y a pas d'attente particulière du jury concernant le support choisi pour l'exposé. En revanche, il est attendu que le plan détaillé soit cohérent et consistant au plan mathématique, et que sa présentation soit structurée et claire. Les candidats doivent être conscients de l'invalidité de raisonnements fondés sur des arguments circulaires (c'est-à-dire supposant comme prémisses ce que l'argument est sensé prouver). À titre d'exemple, le produit scalaire ne saurait être défini par son expression dans une base orthonormée si une telle base est ultérieurement définie par les valeurs des produits scalaires des vecteurs qui la constituent.

Une entière liberté est laissée au candidat pour organiser et utiliser le tableau à sa convenance lors de l'oral, notamment lors de la présentation du plan et celle du développement. En particulier, il n'y a pas d'attente du jury que l'intégralité du plan exposé tienne sur le tableau, la possibilité étant offerte au candidat d'effacer pour poursuivre l'exposé de son plan. Néanmoins, il importe que le tableau soit clairement organisé et que ce qui y figure soit lisible.

Les documents vidéo projetés par les candidats peuvent être de nature variée : présentation d'un plan détaillé personnel élaboré à l'aide du traitement de texte, utilisation de captures d'écran de ressources numériques autorisées, présentation d'illustrations réalisées à l'aide d'un outil logiciel. Le jury insiste cependant pour signaler que de trop nombreux candidats se contentent de présenter à l'écran une succession de « copiés-collés » issus de manuels numériques. La présentation de leur plan consiste alors en la seule lecture ou paraphrase de ce qui est vidéo projeté, sans aucun apport personnel (mise en lumière des articulations, mise en perspective, analyse critique). Certains candidats ont même présenté des captures de manuels correspondant à des énoncés incomplets, voire erronés. La dissimulation du manque de maîtrise du sujet derrière la présentation décousue d'une succession de ces « copiés-collés » n'est en général que de courte durée, les premières questions du jury visant à vérifier la bonne maîtrise des notions présentées.
Le plan détaillé doit offrir des ouvertures sur au moins deux développements consistants en lien avec la leçon, parmi lesquels le jury pourra choisir. Au titre du développement, il peut être demandé une démonstration d'un résultat énoncé ou encore la résolution intégrale ou partielle d'un exercice d'illustration ou d'application figurant dans le plan du candidat. Le jury déplore que certains candidats admettent tous les énoncés de leur plan (ce qui laisse entendre qu'ils ne sont pas prêts à en présenter une démonstration) et ne suggèrent aucun exemple ou exercice susceptible de faire l'objet d'un développement. Faut-il rappeler que les candidats doivent être capables de démontrer un résultat constituant le cœur de la leçon, même si la preuve de ce résultat ne figure pas dans les programmes des classes du secondaire (collège et lycée) sur lesquels le programme du concours ne fait que s'appuyer ?
Le jury valorise la présence d'illustrations qui peuvent revêtir des formes variées : exemples et contre-exemples, applications, schémas, graphiques, exercices nécessitant ou non des outils logiciels (géométrie dynamique, tableur, logiciel de programmation). L'utilisation des outils numériques pour illustrer la leçon de manière judicieuse est valorisée. À ce titre, il peut être judicieux pour les candidats d'avoir élaboré, au cours de leur année de préparation, une bibliothèque bien maîtrisée d'illustrations à la fois pertinentes et consistantes, et d'avoir réfléchi à leur intérêt mathématique, didactique ou pédagogique.

Sur le plan de la forme, les candidats qui choisissent de présenter leur plan au moyen d'un document numérique vidéo projeté (ce qui n'est ni obligatoire, ni interdit) doivent prendre garde au fait que ce document sera lu par des personnes se situant à au moins trois mètres de l'écran ; il convient donc d'éviter les documents composés avec des caractères de trop petite taille.

- *Concernant la maîtrise des contenus mathématiques*

La maîtrise des contenus mathématiques présentés constitue le premier attendu de la part du jury. Les définitions, théorèmes et propriétés doivent être énoncés de manière exacte et précise et le candidat doit bien distinguer le statut de chaque énoncé. Toutes les hypothèses nécessaires à la validité d'un théorème doivent être citées et le candidat doit connaître la portée de chacune d'elles. Le jury ne peut pas se contenter de réponses vagues et imprécises (« une suite croissante, c'est quand les termes augmentent ») ou d'approximations dans l'utilisation du langage mathématique (confusions entre un point du plan muni d'un repère et le couple de ses coordonnées dans ce repère). Une attention particulière doit être portée sur l'emploi des quantificateurs et des connecteurs logiques, les conditions d'existence ou d'unicité d'un objet mathématique, les articulations logiques entre les différentes lignes d'un raisonnement ou d'un calcul algébrique. Il est systématiquement demandé au candidat d'écrire au tableau de manière formalisée un énoncé ou une propriété mathématique en lien avec la leçon. Cela permet au jury d'apprécier l'aptitude du candidat à utiliser correctement le langage mathématique (vocabulaire, notations, syntaxe). À titre d'exemples, il a été demandé d'écrire la définition du maximum d'une fonction d'une variable réelle, celle d'une fonction croissante, ou encore de présenter explicitement une démonstration par récurrence. La présence des quantificateurs et la justesse de leur place dans l'énoncé figurent alors parmi les critères d'évaluation.

- *Concernant la posture devant le jury*

Tout au long de l'épreuve, le jury accorde une grande importance à la posture du candidat, qui doit être celle qu'on peut attendre d'un futur enseignant en termes de communication écrite et orale et d'interaction avec l'auditoire. Le jury est attentif à la qualité des traces écrites au tableau, notamment au niveau de l'orthographe, mais aussi du soin apporté à la réalisation des schémas et des représentations graphiques. L'expression orale doit satisfaire à des critères de qualité tant dans le choix du niveau de langue adopté que dans la formulation de phrases complètes respectant les règles élémentaires de syntaxe et de grammaire. L'interaction avec le jury concerne à la fois l'écoute, la finesse de compréhension du questionnement et des aides que le jury ne manque pas de suggérer ainsi que la réactivité du candidat. Rester face au tableau et dos au jury pendant l'ensemble de l'exposé ou du développement constitue une attitude peu propice au dialogue et à l'interaction. Enfin, trop de candidats restent très dépendants de leurs notes, qu'ils recopient presque mot à mot, manifestant ainsi un manque d'aisance et de recul sur les notions présentées.
L'énumération de ces défauts ne saurait faire oublier que de nombreux candidats sont capables de présenter un plan structuré, riche et cohérent, tout en faisant preuve d'une bonne gestion du temps alloué pour l'exposé. Certains exposés sont enrichis d'illustrations ou d'applications originales et créatives, manifestant un véritable recul par rapport au sujet traité.

- *Concernant les manuels numériques*

Si l'utilisation des manuels numériques mis à disposition permet de gagner du temps dans la rédaction de certains énoncés (notamment ceux des exercices d'illustration), le candidat doit faire preuve d'esprit critique et de prise de recul vis-à-vis de ces ressources dont il est rappelé qu'elles n'ont pas reçu de validation institutionnelle. Le plan détaillé ne saurait être limité à une suite plus ou moins ordonnée de « copiés-collés » d'extraits de manuels, sans aucun apport personnel ni recul de la part du candidat. Si les plans constitués de « copiés-collés » issus de manuels permettent, en général mais pas toujours, que les énoncés présentés soient corrects, cela ne suffit pas pour attester de la maîtrise du sujet et le jury s'attache toujours à vérifier l'appropriation par le candidat des notions qui figurent dans son plan. Il est conseillé aux candidats de travailler, lors de la préparation de l'épreuve, sur un nombre limité de manuels, judicieusement choisis et utilisés tout au long de l'année de préparation au concours. Enfin, il est ici rappelé qu'en plus des manuels numériques, des documents ressources accompagnant les programmes et disponibles sur Eduscol sont mis à disposition des candidats lors de leur préparation et peuvent pertinemment contribuer à nourrir leur réflexion mathématique et didactique.

- *Concernant les outils logiciels*

D'une manière générale, le jury apprécie l'utilisation d'outils logiciels, à condition qu'ils soient maîtrisés par le candidat. C'est en général le cas pour le tableur ou le logiciel GeoGebra, même si les possibilités dynamiques de celui-ci et son volet 3D ne sont pas toujours exploités autant qu'ils pourraient l'être. Quoiqu'un peu moins naturellement employés par les candidats lors de leur oral, les logiciels de programmation sont davantage utilisés que les années précédentes, à la grande satisfaction du jury. Ils pourraient être encore davantage intégrés aux leçons, notamment pour illustrer certaines notions (repérage et transformations du plan, calculs approchés de solutions d'équations, d'intégrales, simulation de lois de probabilité, recherche de seuils, etc.)

- *Conseils pour la préparation*

Les attentes du jury seront d'autant plus facilement satisfaites le jour de l'oral que le candidat aura mené un travail de long terme dans la préparation des leçons, qu'il peut être judicieux de regrouper autour de quelques grandes thématiques. Parmi ces thématiques, on peut citer :

- les phénomènes évolutifs discrets et continus, thème qui englobe l'étude des suites, des fonctions, de la dérivation (évolution instantanée), mais aussi la proportionnalité (croissance linéaire) et l'exponentielle ;
- l'analyse asymptotique, thème qui englobe les limites de suites et de fonctions, mais aussi les croissances comparées entre fonctions logarithmes, polynômes, exponentielles ;
- la géométrie plane, thème qui englobe les configurations, les transformations, le repérage, les problèmes de constructions, la trigonométrie et les nombres complexes ;
- la géométrie dans l'espace, thème qui englobe le repérage (y compris sur la sphère), les solides usuels mais aussi les sections planes et les calculs de volumes ;
- les statistiques et probabilités, thème qui englobe le traitement des données et les phénomènes dépendant du hasard, sans oublier les liens qui unissent fréquences et probabilités ;
- les calculs, exacts et approchés, thème qui englobe la mesure des grandeurs, le calcul intégral, l'utilisation d'algorithmes, la résolution d'équations et d'inéquations ;
- les outils mathématiques de modélisation (suites, fonctions, matrices, graphes, lois de probabilités).

Préparer les différentes leçons à travers ces grands thèmes permet d'acquérir une vision globale de l'ensemble des contenus mathématiques au programme de l'enseignement secondaire, de percevoir l'intérêt et le rôle des différents éléments qui le composent, les liens qui les unissent, les similitudes qu'ils peuvent présenter, mais aussi leurs spécificités propres.

Option mathématiques : choix des leçons

Voici la liste des sujets proposés aux candidats à l'option mathématiques à la session 2019 :

1. Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle.
2. Variables aléatoires discrètes.
3. Loi binomiale. Applications.
4. Variables aléatoires réelles à densité.
5. Statistique à une ou deux variables, représentation et analyse de données.
6. Multiples et diviseurs dans N, nombres premiers.
7. PGCD et PPCM dans Z. Applications.
8. Forme trigonométrique d'un nombre complexe. Applications.
9. Trigonométrie. Applications.
10. Géométrie vectorielle dans le plan et dans l'espace.
11. Repérage dans le plan, dans l'espace, sur une sphère.
12. Droites et plans dans l'espace.
13. Transformations du plan. Frises et pavages.
14. Relations métriques et angulaires dans le triangle.
15. Solides de l'espace : représentations et calculs de volumes.
16. Périmètres, aires, volumes.
17. Produit scalaire dans le plan et dans l'espace.
18. Proportionnalité et géométrie.
19. Problèmes de constructions géométriques.
20. Problèmes d'alignement, de parallélisme, d'intersection.

21. Proportionnalité et linéarité. Applications.
22. Systèmes d'équations linéaires et systèmes d'inéquations linéaires. Applications.
23. Problèmes conduisant à une modélisation par des équations ou des inéquations.
24. Résolution de problèmes à l'aide de graphes orientés ou non orientés.
25. Problèmes conduisant à une modélisation par des matrices.
26. Problèmes conduisant à l'utilisation d'algorithmes.
27. Différents types de raisonnement en mathématiques.
28. Applications des mathématiques à d'autres disciplines.
29. Fonctions polynômes du second degré. Equations et inéquations du second degré. Applications.
30. Suites numériques. Limites.
31. Limite d'une fonction réelle de variable réelle.
32. Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.
33. Nombre dérivé. Fonction dérivée. Applications.
34. Fonctions exponentielle et logarithme. Applications.
35. Intégrales, primitives.
36. Exemples de calculs d'intégrales (méthodes exactes, méthodes approchées).
37. Problèmes conduisant à une modélisation par des suites ou par des fonctions.

1472 candidats ont tiré au sort pour l'option mathématiques. Le tableau suivant récapitule le nombre de fois où chaque leçon a été tirée et choisie ainsi que la moyenne des notes obtenue.

Leçon	Tirées	% tirages	Choisie	% choisie	Choisie/tirée	Moyenne des notes obtenues
1	79	5,4%	55	7,5%	69,6%	8,2
2	85	5,8%	43	5,8%	50,6%	10,7
3	84	5,7%	41	5,6%	48,8%	7,9
4	74	5,0%	42	5,7%	56,8%	9,1
5	76	5,2%	21	2,9%	27,6%	7,1
6	77	5,2%	39	5,3%	50,6%	9,1
7	75	5,1%	41	5,6%	54,7%	8,9
8	85	5,8%	63	8,6%	74,1%	8,3
9	82	5,6%	52	7,1%	63,4%	8,2
10	76	5,2%	32	4,3%	42,1%	5,4
11	78	5,3%	24	3,3%	30,8%	6,6
12	78	5,3%	32	4,3%	41,0%	6,4
13	84	5,7%	16	2,2%	19,0%	5,7
14	80	5,4%	52	7,1%	65,0%	8,4
15	85	5,8%	33	4,5%	38,8%	8,2
16	78	5,3%	32	4,3%	41,0%	8,4
17	76	5,2%	34	4,6%	44,7%	7,9
18	77	5,2%	38	5,2%	49,4%	7,8
19	80	5,4%	22	3,0%	27,5%	7,0
20	77	5,2%	20	2,7%	26,0%	8,4
21	81	5,5%	40	5,4%	49,4%	7,7
22	71	4,8%	34	4,6%	47,9%	6,4
23	86	5,8%	37	5,0%	43,0%	8,7
24	78	5,3%	21	2,9%	26,9%	9,3

25	84	5,7%	30	4,1%	35,7%	11,1
26	79	5,4%	25	3,4%	31,6%	9,5
27	79	5,4%	45	6,1%	57,0%	9,0
28	88	6,0%	35	4,8%	39,8%	8,5
29	80	5,4%	66	9,0%	82,5%	9,5
30	81	5,5%	67	9,1%	82,7%	8,8
31	81	5,5%	49	6,7%	60,5%	9,1
32	83	5,6%	44	6,0%	53,0%	9,3
33	79	5,4%	64	8,7%	81,0%	9,2
34	79	5,4%	55	7,5%	69,6%	9,6
35	80	5,4%	60	8,2%	75,0%	10,3
36	80	5,4%	36	4,9%	45,0%	7,9
37	69	4,7%	32	4,3%	46,4%	8,1

Option mathématiques : à propos de certaines leçons

— **Leçons 1 à 6** (leçons de probabilités et statistiques)

Certains candidats ne savent pas définir correctement une probabilité.
Quand la représentation par un arbre pondérée est utilisée, peu de candidats sont capables de justifier leurs calculs par les principes mathématiques sous-jacents (probabilités conditionnelles).
Parmi les démonstrations à connaître, on peut citer celle des probabilités totales.
L'articulation probabilités/statistiques et le lien probabilité/fréquence restent en général assez flous.

— **Leçon 5** (représentation et interprétation de données ; outils statistiques)

Elle peut donner lieu à une liste fastidieuse de définitions de toutes sortes, s'éloignant de l'objectif d'un enseignement vivant en prise avec des données issues des sciences physiques, sociales ou économiques (on veillera tout particulièrement aux contextes proposés). Une approche partant des données et mettant en évidence des outils statistiques permettant d'en analyser les grandes tendances et de les représenter est certainement plus convaincante.

— **Leçon 11** (repérage dans le plan, dans l'espace, sur une sphère)

Si le candidat choisit de limiter son exposé à la géométrie repérée présentée dans les programmes du lycée, le jury peut quant à lui, lors de l'entretien, l'interroger sur la manière dont cette notion est introduite dès le cycle 3 (avec le modèle du papier quadrillé) et approfondie au cycle 4 : *(Se) repérer sur une droite graduée, dans le plan muni d'un repère orthogonal, dans un parallélépipède rectangle ou sur une sphère. Abscisse, ordonnée, altitude. Latitude, longitude.* Il convient d'avoir à l'esprit que tous les repères du plan ou de l'espace ne sont pas nécessairement orthonormés, ce qui peut être très utile dans la résolution de certains problèmes.

— **Leçons 19, 20, 23, 25, 26 et 37** (leçons portant sur des problèmes conduisant à…)

Ces leçons ne sauraient se résumer à un catalogue décousu d'exemples, d'exercices d'entraînement ou de simples illustrations. Bien préparées, elles peuvent permettre des plans, des choix et des développements personnels toujours très appréciés du jury. Il y a notamment une attente de problèmes substantiels, riches et variés, servant de fils conducteurs aux notions et aux outils mathématiques qui les sous-tendent. Concernant les problèmes conduisant à une modélisation, la réflexion du candidat doit également porter sur le statut de modèle mathématique (son lien à la réalité, son domaine de validité, ses limites, etc).

— **Leçon 21** (proportionnalité et linéarité. Applications)

Cette leçon permet de revisiter une large part des programmes des cycles 3 et 4, tout en ouvrant des perspectives au niveau du lycée, avec les notions d'indice et de taux (taux composés, taux réciproque, etc). Au niveau du collège, elle offre de nombreuses opportunités, comme les changements d'unités dans les mesures des grandeurs mentionnées dans le programme de cycle 4 (vitesse, débit, masse volumique, concentration, densité de population, rendement d'un terrain, puissance électrique…) ou encore la caractérisation d'une fonction affine par la proportionnalité des accroissements. Au niveau du lycée, il est facile d'exhiber des exemples de fonctions non linéaires. Enfin, une mise en perspective du concept de linéarité dans le cadre d'une dimension supérieure à 1 fait partie du recul M1 attendu de la part du candidat.

— **Leçon 22** (systèmes d'équations linéaires et systèmes d'inéquations linéaires. Applications)

Son intitulé incite à ne pas se cantonner au cadre linéaire (équations ou inéquations s'y ramenant, mais aussi équations ou inéquations trigonométriques). Les exemples proposés doivent illustrer des méthodes de résolution différentes. Pour les systèmes d'équations linéaires, les candidats doivent maîtriser l'algorithme du pivot de Gauss.

— **Leçon 27** (différents types de raisonnements en mathématiques)

Elle doit être illustrée par des exemples variés et « consistants ». Rappelons que le raisonnement par disjonction de cas, s'il est très fréquent en arithmétique (disjonction selon les restes modulo un entier donné), peut également être invoqué en géométrie (disjonction selon la position relative de deux objets géométriques) ou en algèbre (disjonction selon le signe d'une expression littérale). La présentation au tableau de la rédaction précise d'un raisonnement par récurrence faisant usage de quantificateurs (placés au bon endroit…) est attendue du jury.

— **Leçon 32** (théorème des valeurs intermédiaires. Applications)

Cette leçon repose sur un théorème dont il convient, avec un recul de niveau M1, de présenter une démonstration (en s'appuyant sur l'axiome de la borne supérieure ou sur l'algorithme des segments emboîtés) et d'en apprécier le caractère existentiel et non-constructif. Au-delà du théorème et de ses applications immédiates, il peut être intéressant de s'interroger sur la nature de l'image d'un intervalle par une fonction continue : que peut-on dire selon le type d'intervalle (ouvert, fermé, borné ou non) et le type d'image (directe ou inverse) ?

— **Leçon 34** (fonctions exponentielle et logarithme. Applications)

Dans le cadre du recul niveau M1 attendu des candidats, des connaissances sur les fonctions logarithmes autre que le logarithme népérien et leurs applications, ainsi que sur les autres fonctions exponentielles, sont vivement souhaitées.

Option informatique : présentation de la programmation d'un algorithme

Chaque leçon comporte la présentation d'un programme implémentant le cœur d'un des algorithmes présentés, qui ne devrait toutefois pas dépasser une page-écran en général. L'objectif n'est pas nécessairement d'exécuter le programme, mais de discuter du choix des structures de contrôle et de données adaptées à l'algorithme considéré.

De nombreuses leçons ont un intitulé qui commence par *Exemples d'algorithmes...* : ce sont bien des algorithmes concrets qui doivent être présentés et non pas de vagues considérations générales. Des remarques analogues peuvent être faites pour les leçons *Exemples d'activités...* ou *Problèmes de mathématiques...*

Le candidat doit veiller à présenter dans son plan des points susceptibles d'être développés au début de l'interrogation par le jury. L'utilisation de Jupyter a souvent permis une présentation fluide alternant code et commentaires.

D'autre part, cet oral appartient au CAPES de mathématiques : les candidats doivent s'attendre à être questionnés sur des notions mathématiques. Il est en particulier nécessaire de connaître précisément les notations de Landau ($o(.)$ et $O(.)$) ainsi que la définition du logarithme en base 2.

Bien entendu, ils doivent aussi montrer des compétences de programmation : le jury se félicite de constater une maîtrise satisfaisante du langage Python. Les candidats doivent veiller à utiliser des noms explicites des variables, à prototyper correctement leurs fonctions en précisant en particulier les préconditions sur leurs arguments.

Option informatique : choix des leçons

Voici la liste des sujets proposés aux candidats à l'option informatique à la session 2019 :

1 Logique booléenne et instructions conditionnelles : principes et exemples. Applications.
2. Boucles : principes et exemples.
3. Récursivité : principes et exemples.
4. Exemples d'algorithmes de recherche dans un tableau ou une liste.
5. Exemples d'algorithmes opérant sur des chaînes de caractères.
6. Exemples d'algorithmes opérant sur un arbre. Applications.
7. Exemples d'algorithmes opérant sur un graphe. Applications.
8. Exemples d'algorithmes de tri. Comparaison.
9. Exemples illustrant l'utilisation de différentes méthodes de résolution de problèmes algorithmiques.
10. Exemples illustrant l'utilisation de différentes familles de langages de programmation.
11. Exemples de détermination de la complexité (en temps et dans le pire des cas) d'un algorithme.
12. Exemples de démarches et de raisonnements prouvant la terminaison et la correction d'un algorithme.
13. Représentation binaire des nombres : formats, exemples d'applications.
14. Organisation et utilisation des fichiers, exemples d'algorithmes de gestion.
15. Programmation événementielle : principe et applications.
16. Codage et traitement numérique des couleurs.
17. Exemples d'activités manipulant des images bitmap.
18. Exemples d'activités manipulant des objets géométriques : jeux vidéo ou simulations.
19. Exemples d'activités relevant de l'optimisation combinatoire.
20. Exemples d'activités relevant du traitement automatique des textes.
21. Exemples d'activités autour de l'internet : structure, indexation et partage des données, sécurité.
22. Problèmes de mathématiques du cycle 4 pouvant être résolus de manière algorithmique.
23. Problèmes de mathématiques du lycée pouvant être résolus de manière algorithmique.

24. Exemples d’algorithmes agissant sur des matrices.
25. Exemples d’algorithmes de chiffrement et de déchiffrement.
26. Exemples d’algorithmes utilisant un générateur de nombres aléatoires.
27. Exemples de conception et d’utilisations de bases de données. Applications.
28. Exemples d’algorithmes de compression de données.
29. Jeux et stratégies : exemples d’algorithmes.
30. Notion de variables et fonctions en mathématiques et informatique.

120 candidats ont tiré au sort pour l’option informatique. Le tableau suivant récapitule le nombre de fois où chaque leçon a été tirée et choisie ainsi que la moyenne des notes obtenue.

Leçon	Tirées	% tirages	Choisie	% choisie	Choisie/tirée	Moyenne des notes obtenues
1	8	6,7%	5	8,3%	62,5%	5,8
2	8	6,7%	5	8,3%	62,5%	12,9
3	7	5,8%	6	10,0%	85,7%	8,7
4	10	8,3%	8	13,3%	80,0%	8,0
5	10	8,3%	6	10,0%	60,0%	11,1
6	9	7,5%	7	11,7%	77,8%	9,5
7	6	5,0%	3	5,0%	50,0%	7,2
8	8	6,7%	6	10,0%	75,0%	3,4
9	8	6,7%	4	6,7%	50,0%	5,9
10	10	8,3%	2	3,3%	20,0%	3,4
11	9	7,5%	4	6,7%	44,4%	7,0
12	8	6,7%	2	3,3%	25,0%	3,1
13	7	5,8%	5	8,3%	71,4%	9,5
14	7	5,8%	1	1,7%	14,3%	1,0
15	10	8,3%	4	6,7%	40,0%	7,8
16	8	6,7%	4	6,7%	50,0%	9,7
17	9	7,5%	2	3,3%	22,2%	10,1
18	7	5,8%	3	5,0%	42,9%	8,2
19	8	6,7%	3	5,0%	37,5%	4,3
20	10	8,3%	4	6,7%	40,0%	11,0
21	7	5,8%	0	0,0%	0,0%	X
22	7	5,8%	5	8,3%	71,4%	7,7
23	7	5,8%	4	6,7%	57,1%	9,3
24	9	7,5%	7	11,7%	77,8%	7,1
25	6	5,0%	5	8,3%	83,3%	8,2
26	8	6,7%	4	6,7%	50,0%	3,2
27	8	6,7%	2	3,3%	25,0%	15,9
28	6	5,0%	1	1,7%	16,7%	12,0
29	9	7,5%	5	8,3%	55,6%	3,4
30	6	5,0%	3	5,0%	50,0%	11,3

4.2 Épreuve sur dossier

La deuxième épreuve orale d'admission est une épreuve sur dossier : elle s'appuie sur des éléments fournis par le jury portant sur un thème des programmes de mathématiques du collège, du lycée général et du lycée technologique. Ce thème est illustré par un exercice qui peut être complété par des productions d'élèves ou des extraits de programmes officiels, de documents ressources ou de manuels. Cette épreuve commence par l'exposé des réponses du candidat à trois questions (comprenant notamment la présentation motivée d'exercices sur le thème du dossier). Elle se poursuit par un entretien avec le jury prenant appui sur le dossier fourni et l'exposé présenté. On cherche notamment à évaluer la capacité du candidat à engager une réflexion pédagogique pertinente ainsi qu'à communiquer efficacement et clairement. L'épreuve orale s'achève par un dernier échange avec le candidat autour de la diversité, la richesse et la complexité du métier auquel il postule. Cela est l'occasion d'évaluer la capacité du candidat à prendre en compte les acquis et les besoins des élèves, à se représenter la diversité des conditions d'exercice de son métier futur, à en connaître de façon réfléchie le contexte de travail dans différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) ainsi que les valeurs qui le portent, dont celles de la République.

Lors de cet oral et compte tenu de la diversité des compétences professionnelles attendues chez un enseignant de mathématiques, les attentes du jury sont multiples et l'évaluation des candidats prend en compte des critères nombreux et variés, plus particulièrement :
· Maîtrise (compétences mathématiques) ;
· Organisation et clarté (compétences pédagogiques) ;
· Pertinence et niveau (compétences mathématiques et pédagogiques) ;
· Réactivité (compétences mathématiques et professionnelles).

Quelques remarques, éclairages et conseils sur la deuxième épreuve orale sont donnés ci-dessous. Ils visent notamment à favoriser le travail de préparation de tout candidat à cette épreuve du concours (dont le format apparaît maîtrisé par la majorité des candidats).

Concernant la forme de l'exposé et de l'entretien avec le jury

La majorité des candidats ont une posture adaptée face au jury et s'expriment oralement dans un français correct. Le registre de langage est relâché pour un nombre limité d'entre eux qui s'en trouvent naturellement pénalisés lors de l'évaluation : une très bonne maîtrise de la langue française, tant à l'écrit qu'à l'oral, est attendue. La capacité à savoir écouter les questions, à interagir avec le jury (avec un langage clair, compréhensible) et à corriger ses erreurs est une qualité que le jury sait apprécier, la ténacité dans la recherche d'une solution ou d'une erreur commise l'est aussi.
Le vidéoprojecteur est utilisé par de nombreux candidats dans des cadres variés : présentation de l'exposé, présentation d'une application obtenue à l'aide d'un outil logiciel, captures d'écran d'exercices issus des manuels numériques mis à disposition dans le cadre du concours... Dans le cadre de la préparation, il y a lieu d'avoir une réflexion sur la réalité de la plus-value apportée par l'emploi d'un vidéoprojecteur ainsi que sur l'articulation nécessaire entre le support vidéoprojeté, les traces écrites portées au tableau et la prestation orale. En particulier, une rédaction trop détaillée du support (diaporama ou notes écrites) conduit trop régulièrement à un manque de recul et à une simple lecture du support (parfois dos tourné au jury) plutôt qu'à une réelle présentation vivante et convaincante, et cela au-delà du temps trop conséquent consacré à la mise en forme ou à l'écriture détaillée d'une telle présentation. De plus, les candidats qui choisissent de présenter leur exposé au moyen d'un document numérique projeté (ce qui n'est ni obligatoire, ni interdit) doivent prendre conscience que ce document sera projeté et lu par des personnes se situant à au moins trois mètres de l'écran ; il convient donc d'éviter les documents composés avec des caractères de trop petite taille.
La plupart des candidats gèrent assez bien l'utilisation de leurs notes personnelles lors de l'exposé devant la commission (encore trop de candidats ont beaucoup de difficultés à se détacher de leurs notes, et cela

même si le jury le demande avec bienveillance). Il convient de recourir à ses notes de façon discrète, adaptée et parcimonieuse, ce qui rendra l'exposé d'autant plus vivant et convaincant. L'utilisation du tableau est assez correcte pour une majorité de candidats. Il convient d'avoir une organisation du tableau qui soit claire et structurée, le tableau pouvant être effacé au cours de l'exposé si besoin est.
De façon globale, le temps de présentation apparaît plutôt bien géré : il est important de s'organiser pour disposer d'un temps suffisant pour traiter chacune des trois questions de l'exposé dans les vingt minutes imparties. Un nombre limité de candidats ont tendance à consacrer trop de temps à l'analyse des copies ou à la rédaction de la correction de l'exercice, et cela au détriment de la présentation motivée d'exercices sur le thème du dossier.

Concernant le fond de l'exposé et de l'entretien avec le jury sur le dossier

L'analyse des productions d'élèves est globalement assez satisfaisante, même si l'accompagnement proposé ne l'est pas toujours. Il y a aussi une volonté notable de repérer et mettre en valeur les points positifs dans les productions des élèves. De plus, les erreurs commises par les élèves sont davantage régulièrement perçues comme inscrites dans le processus d'apprentissage des élèves, ce qui est positif. Encore trop de candidats ne lisent pas complètement et précisément les productions d'élèves : au cours de l'interrogation par le jury, ils découvrent alors qu'ils ont mal interprété ces productions et cela souvent par manque d'attention et de réflexion lors de la préparation. Au-delà de montrer les erreurs contenues dans les productions d'élèves fournies, il convient d'approfondir ces erreurs et d'identifier avec précision leur origine (par exemple la faute de raisonnement commise, comme une confusion entre expérimentation et démonstration). De même, il convient également d'avoir des idées de pistes de remédiation à proposer en regard de certaines erreurs commises par les élèves. Ces pistes ne sauraient se résumer à apprendre son cours, à faire des exercices supplémentaires ou à suivre d'emblée une toute autre démarche. Enfin, il s'agit de bien lire l'énoncé de la première question posée, tous les dossiers ne demandant pas nécessairement la même démarche d'analyse. En particulier, quelques candidats s'évertuent à mener une analyse détaillée des copies des élèves au regard des six compétences de l'activité mathématique, ce qui n'est nullement un attendu de l'exposé et ne s'avère pas des plus pertinents.

La majorité des candidats parvient à proposer une résolution de l'exercice proposé dans le dossier. Certaines copies d'élèves peuvent suggérer quelques pistes de réflexion dans la résolution de l'exercice proposé mais un nombre encore trop important de candidats reproduisent des erreurs que les copies peuvent contenir. Dans le temps imparti à la préparation, il peut être judicieux de chercher à résoudre d'abord et par soi-même l'exercice proposé, et cela avant d'analyser les corrections proposées par les élèves. Un tel choix peut permettre de garder une certaine clairvoyance et de ne pas se laisser influencer par les copies des élèves, et particulièrement vis-à-vis des erreurs qu'elles contiennent. Par ailleurs, par manque de temps, d'efforts, d'application ou de maîtrise, la rédaction de cette correction manque trop souvent de rigueur, de précision, d'articulations ou de détails. Il s'agit de présenter et d'écrire la correction de l'exercice telle qu'elle pourrait être idéalement présentée devant une classe et écrite dans un cahier d'élève. Il s'agit notamment d'insister sur les points-clefs ou délicats du raisonnement comme peut être amené à le faire l'enseignant devant une classe (et non de présenter une simple esquisse d'une solution de l'exercice proposé). En particulier, il convient donc d'employer un vocabulaire mathématique précis et adéquat et de présenter au tableau un raisonnement écrit, correctement articulé et quantifié, avec des notations justes. La correction de l'exercice peut être judicieusement diversifiée, par exemple en évoquant d'autres démarches possibles que celle présentée ou en établissant un lien avec d'autres problèmes ou d'autres contextes.

De façon générale, les exercices proposés par le candidat restent trop souvent basiques : ils sont relativement pauvres, peu pertinents et peu originaux, et cela quand ils ne sont pas hors sujet ou redondants entre eux. Les exercices restent trop souvent proches de l'exercice du dossier, même s'il peut être intéressant de proposer un travail de « remédiation » à l'éclairage de problèmes rencontrés dans les productions d'élèves (cela ne saurait suffire toutefois à illustrer un thème dans sa généralité). Par ailleurs, les exercices proposés par le candidat ne sont pas systématiquement cherchés lors du temps de préparation. Il est important de sélectionner, étudier et chercher à résoudre ces exercices avec soin lors du temps de préparation (le jury demande régulièrement aux candidats une correction ou une ébauche de correction d'un ou des exercices proposés). De plus, les candidats parviennent encore trop peu à motiver avec précision le choix des exercices par des justifications claires d'ordre pédagogique ou didactique. Enfin, comme l'année dernière, il était assez régulièrement demandé que le choix d'exercices en rapport avec le thème illustre une ou deux des six compétences de l'activité mathématique (chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner, communiquer). Dans ce cas, il convient de bien tenir compte de cette précision dans le questionnement. Que penser par exemple d'un exercice où l'élève est guidé pas à pas dans l'énoncé pour illustrer la compétence « chercher » ? En conclusion, un réel travail est à réaliser sur cette proposition d'exercices, qui est encore trop souvent négligée, notamment par manque de temps lors de la préparation.

Quelques points spécifiques

- *Concernant la maîtrise des contenus mathématiques*

De façon générale, une réelle maîtrise des contenus mathématiques des candidats est attendue dans cette seconde épreuve d'admission. Le jury ne peut pas se contenter de réponses vagues et imprécises ou d'approximations dans le vocabulaire mathématique (telle que, par exemple, la confusion entre un point du plan muni d'un repère et les coordonnées de ce point dans le repère).

Dans le cadre de ce deuxième oral, le jury attend aussi des candidats qu'ils sachent écrire correctement une définition ou un théorème au tableau, et cela avec des énoncés correctement quantifiés (il ne s'agit pas, bien entendu, d'introduire des quantificateurs à tout propos, mais simplement de savoir s'en servir au moment opportun, ce qui reste encore insuffisamment le cas). À titre d'exemple, des candidats ont été parfois dans l'embarras pour donner un énoncé correct de la croissance d'une fonction définie sur un intervalle de **R** et à valeurs réelles, de la colinéarité de deux vecteurs du plan ou du théorème des valeurs intermédiaires.

- *Concernant les manuels numériques*

L'utilisation des manuels numériques mis à disposition est possible mais le candidat doit faire preuve d'un minimum d'esprit critique et de prise de recul vis-à-vis de ces ressources. Certains manuels comportent des maladresses, voire des inexactitudes ou des erreurs parfois significatives. Même lorsque les exercices proposés sont pertinents dans leur thématique, le jury regrette le manque de recul des candidats vis-à-vis des manuels utilisés : les exercices sont parfois d'une longueur démesurée et seules une ou deux questions seraient vraiment intéressantes, ou bien, un énoncé semblant attrayant à la simple lecture se révèle vide de sens quand on le résout, etc. On notera que les modifications d'énoncés, par exemple en présentant une forme « fermée » puis « ouverte », peuvent être intéressantes.

Il est à noter que les manuels ne constituent pas la seule source possible. En effet, les documents d'accompagnement, les autres ressources disponibles sur le site EDUSCOL, voire les exercices de dossiers proposés les années précédentes peuvent fournir bien des idées intéressantes. Lors de sa préparation en amont du concours, il peut être pertinent de travailler sur un nombre limité de ressources, judicieusement choisies et utilisées.

- *Concernant les outils logiciels*

D'une manière générale, le jury a apprécié l'utilisation des outils logiciels, visiblement bien maîtrisés par une majorité de candidats, notamment en termes de logiciel de géométrie dynamique ou de tableur (à noter que le logiciel GeoGebra est un logiciel de géométrie *dynamique* et qu'il est encore bien souvent utilisé de manière trop statique). Tout candidat au concours se doit aussi de maîtriser un logiciel de programmation (l'utilisation de Scratch ou de Python est encore loin d'être généralisée). Il est à noter que les candidats ont une propension certaine à se limiter au(x) logiciel(s) utilisé(s) dans le sujet proposé lors du temps de correction de l'exercice ou de présentation d'exercices sur le même thème que le dossier, alors que, dans certains cas, d'autres logiciels non évoqués dans le sujet peuvent être judicieusement employés pour enrichir l'exposé. Enfin, les outils logiciels doivent apporter une réelle plus-value quand ils sont exploités ; ils sont encore trop exclusivement envisagés comme outil de conjecture, et cela alors que les utilisations sont bien plus variées (par exemple en tant que preuve).

Quelques conseils aux candidats

En complément de ceux déjà formulés ci-dessus, quelques conseils peuvent être donnés aux futurs candidats :

- bien connaître le format et les modalités de déroulement de l'épreuve (dans ce cadre et au-delà de l'étude du présent rapport, on peut encourager les candidats à assister à quelques oraux du concours quand cela est possible) ;
- s'entraîner à bien gérer le tableau, de façon claire et pédagogique, en alternance ou pas avec un diaporama vidéoprojeté ;
- travailler sur les dossiers des années précédentes ou de la présente session (publiés sur le site du CAPES de mathématiques) ;
- accorder une importance toute particulière à la précision et à la rigueur dans le vocabulaire mathématique employé, et cela tout au long de l'interrogation orale (par exemple, $f(x)$ ne désigne pas une fonction mais désigne l'image du réel x par la fonction f). En particulier, il s'agit d'être capable :
  - d'énoncer correctement et précisément tout résultat de référence (définition, propriété, théorème…) du secondaire, en en ayant bien compris le sens, l'intérêt et les applications ;
  - de rédiger une correction détaillée, rigoureuse, articulée d'un point de vue logique laissant apparente la démarche de résolution, et plus généralement être capable de produire au tableau des écrits élaborés et rigoureux ;
- opérer un choix judicieux d'exercices qui répondent clairement aux objectifs fixés par le sujet, avec une motivation du choix opéré ;
- maîtriser une bibliographie d'exercices intéressants à proposer et à exploiter à l'oral, et cela sur différents thèmes et avec une réflexion approfondie, tant sur un plan pédagogique que didactique.

Concernant l'échange autour du contexte du métier et des valeurs de la République

De façon globale, un nombre conséquent de candidats témoignent d'une prise de recul correcte vis-à-vis du métier auxquels ils aspirent. Ce temps d'échanges autour du contexte du métier et des valeurs de la République apparaît assez mieux préparé que les années précédentes. Il s'agit pour le candidat de dépasser le stade du constat et de la description pour aller vers des éléments de réponses construits, structurés et étayés, en étant conscient des responsabilités attendues de la part d'un futur enseignant. Selon la question posée, il est nécessaire d'avoir réfléchi à un thème sans s'enfermer uniquement dans une logique disciplinaire. Faire preuve de bon sens et avoir clairement conscience que le métier de professeur s'exerce au sein d'un système professionnel humain et donc interrelationnel est toujours une aide. Enfin, même s'il ne s'agit absolument pas d'un contrôle des connaissances sur le système éducatif, un minimum de connaissances sur celui-ci est nécessaire, notamment sur le fonctionnement d'un établissement, afin de permettre au bon sens de pouvoir s'exprimer sereinement, dans le cadre des valeurs de la République.

Pour favoriser cette prise de recul, plusieurs pistes sont envisageables (la liste ci-dessous n'est naturellement pas exhaustive) :

- travailler à partir de différentes ressources institutionnelles ou textes de référence sur les problématiques auxquelles un professeur peut être confronté et les mettre en lien avec les valeurs de la République (exemples : égalité des chances, droit à l'éducation…). En particulier, mener un travail de réflexion spécifique autour du référentiel de compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation publié au Bulletin Officiel n°30 du 25 juillet 2013 est des plus judicieux ;

- bien maîtriser (définition, compréhension) quelques concepts clefs sous-jacents à ces problématiques : différenciation, déterminismes sociaux-culturels, égalité des chances…
- mettre à profit une immersion en établissement scolaire. Cette expérience peut permettre de mieux connaître quelques grandes lignes sur le système éducatif et le fonctionnement d'un établissement scolaire (notamment en termes d'instances ou de diversité et d'interactions des acteurs éducatifs).

Dans le cadre de ce dernier temps d'échanges avec le jury, des exemples de questions posées au candidat à la présente session ou aux sessions précédentes sont donnés ci-dessous (la liste ci-dessous n'est naturellement pas exhaustive) :

- Le jour de la prérentrée, un collègue vient vous témoigner son inquiétude au sujet de l'un de vos élèves qu'il considérait en décrochage en fin d'année scolaire précédente. Quels éléments vous permettent de déceler un éventuel cas de décrochage ? Que faites-vous pour accompagner au mieux cet élève ?

- Est-il envisageable qu'un élève en décrochage scolaire ne vienne pas en cours car ainsi il ne perturbe pas les cours ? Pourquoi ?

- Que peut-on mettre en place comme action à court, moyen et long terme si un élève présente des signes de conduite addictive ?

- À la rentrée, vous accueillez un enfant non voyant. Que faites-vous ?

- Lors de la première réunion parents/professeurs de l'année, seulement quatre familles sont présentes. Comment réagissez-vous ?

- Certains parents d'élèves peuvent se trouver démunis face à l'école (barrière de la langue, méconnaissance des codes scolaires, mauvais souvenirs de leur scolarité, …) Comment les aider à se sentir à l'aise et pourquoi est-ce important d'y arriver ?

- Est-il juste de donner deux sujets d'évaluation différents à des élèves d'une même classe ?

- Votre principal vous annonce que le choix a été fait de plus mettre de notes aux évaluations en classe de 6^{e}. Qu'en pensez-vous ?

- Les notes à un devoir que vous avez proposé sont catastrophiques. Comment réagissez-vous ?

- Quelles modalités avez-vous prévu de mettre en place pour évaluer vos élèves ?

- Lors de la correction d'une copie, vous suspectez qu'un élève souffre de dyslexie non détectée. Que faites-vous ? Pourquoi ?

- Que pouvez-vous mettre en place dans vos pratiques pour que les élèves les plus faibles ne décrochent pas et que les plus à l'aise ne s'ennuient pas ?

- Dans un établissement REP, vous bénéficiez d'une heure de concertation à votre emploi du temps. Comment employer cette heure ?

- Le travail en équipe prive-t-il un enseignant de sa liberté pédagogique ?

- Vous apprenez qu'un de vos élèves alimente un forum qui nie des vérités scientifiques. Que faites-vous ?

- Le chef d'établissement souhaite développer la culture scientifique et technologique au sein de son établissement. Est-ce utile, pourquoi ? Est-ce le rôle du professeur de mathématiques ?

- Les filles s'orientent moins que les garçons vers les études scientifiques. Pourquoi ? Que faites-vous en tant que professeur de mathématiques ?

- Une élève de 3^{e} aux résultats très satisfaisants souhaite s'orienter dans le lycée professionnel proche de son domicile. Comment réagissez-vous ?

- Les élèves issus des milieux socioprofessionnels défavorisés choisissent très peu la première scientifique à l'issue de la seconde. Qu'en pensez-vous et que proposez-vous ?

- *En guise de conseils de préparation*

Cela semble évident, mais prendre connaissance de la liste des thèmes et des éventuels documents proposés (dont ce rapport !) est un préalable. L'expérience a montré que certains candidats ne l'avaient pas fait.
Selon la question posée, il est nécessaire d'avoir réfléchi à un thème sans s'enfermer uniquement dans une logique disciplinaire. Faire preuve de bon sens et avoir clairement conscience que le métier de professeur s'exerce au sein d'un système professionnel humain et donc inter-relationnel est toujours une aide.
Enfin, s'il ne s'agit absolument pas d'un contrôle des connaissances sur le système éducatif, un minimum de connaissances sur celui-ci est nécessaire, notamment sur le fonctionnement d'un établissement, afin de permettre au bon sens de pouvoir s'exprimer sereinement, **dans le cadre des valeurs de la République.**

4.3 Logiciels

Le tableau suivant recense les candidats ayant généré des fichiers lors de leur temps de préparation, toute épreuve confondue, selon le logiciel utilisé :

OpenOffice	3314	92,4%
GeoGebra	1586	44,2%
Python	539	15,0%
Scratch	148	4,1%
Xcas	49	1,4%
Scilab	29	0,8%
SQLite	2	0,1%

Le tableau suivant détaille l'utilisation des modules d'OpenOffice, toujours selon les fichiers créés par les candidats :

Writer	1411	39,3%
Calc	848	23,6%
Impress	1877	52,3%
Draw	18	0,5%
Math	15	0,4%
Base	5	0,1%

4.4 Au sujet de *CAPES*OS

L'usage de l'outil informatique au cours de la session 2019 confirme la bonne préparation des candidats au système **CAPES**OS ainsi que sa pleine adoption.

Quelques utilisations singulières ont cependant pu être observées et suggèrent alors les remarques suivantes :

- Il relève de la responsabilité des candidats de sauvegarder les travaux qu'ils souhaitent présenter devant le jury. Ainsi le simple fait de laisser les logiciels ouverts en salle de préparation ne suffit pas à retrouver leurs productions en salle d'interrogation.
- Le système **CAPES**OS bénéficie des associations de type de fichier, il convient donc de conserver les bonnes extensions lors de la sauvegarde de ses fichiers pour en faciliter l'ouverture. Dès lors, par exemple, une image sauvegardée au format png mais enregistrée avec l'extension odt s'avèrera délicate à ouvrir.
- Les candidats doivent, au sein de certains logiciels, porter attention au mode dans lequel ils travaillent : radians ou degrés. Il convient aussi de savoir passer d'un mode à l'autre.
- Certains candidats masquent accidentellement la barre d'outils mathématiques de leur traitement de texte. Il serait opportun de savoir l'afficher à nouveau en cas de besoin.
- Par ailleurs, il est déconseillé de poser des objets sur le clavier de l'ordinateur. Par exemple, les effets d'un livre posé sur un coin du clavier (en particulier sur la touche Ctrl) peuvent être fort déroutants pour les candidats.

Nous rappelons enfin aux candidats qu'il est de leur responsabilité de savoir utiliser les logiciels et l'environnement de travail mis à leur disposition pendant les épreuves orales du concours.

5 Avenir du concours

Voici la liste des thèmes qui seront proposés dans le cadre de la première épreuve d'admission lors de la session 2020.

5.1 Option mathématiques

L'ensemble de l'épreuve s'inscrit dans le cadre des programmes de mathématiques du collège et des différentes séries du lycée général et technologique. La capacité du candidat à illustrer le sujet par des exemples sera valorisée.

1. Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle.
2. Variables aléatoires discrètes.
3. Variables aléatoires réelles à densité.
4. Statistique à une ou deux variables, représentation et analyse de données.
5. Multiples et diviseurs dans **N**, nombres premiers.
6. PGCD et PPCM dans **Z**. Applications.
7. Congruences dans **Z**. Applications.
8. Forme trigonométrique d'un nombre complexe. Applications.
9. Trigonométrie. Applications.
10. Géométrie vectorielle dans le plan et dans l'espace.
11. Repérage dans le plan, dans l'espace, sur une sphère.
12. Droites et plans dans l'espace.
13. Transformations du plan. Frises et pavages.
14. Relations métriques et angulaires dans le triangle.
15. Solides de l'espace : représentations et calculs de volumes.
16. Périmètres, aires, volumes.
17. Produit scalaire dans le plan. Applications.
18. Applications de la notion de proportionnalité à la géométrie.
19. Problèmes de constructions géométriques.
20. Problèmes d'alignement, de parallélisme, d'intersection.
21. Proportionnalité et linéarité. Applications.
22. Pourcentages et taux d'évolution. Applications.
23. Systèmes d'équations linéaires et systèmes d'inéquations linéaires. Applications.
24. Problèmes conduisant à une modélisation par des équations ou des inéquations.
25. Problèmes conduisant à une modélisation par des matrices.
26. Problèmes conduisant à l'utilisation d'algorithmes.
27. Différents types de raisonnement en mathématiques.
28. Applications des mathématiques à d'autres disciplines.
29. Fonctions polynômes du second degré. Équations et inéquations du second degré. Applications.
30. Suites numériques. Limites.
31. Suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Applications.
32. Limite d'une fonction réelle de variable réelle.
33. Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.
34. Nombre dérivé. Fonction dérivée. Applications.
35. Fonctions exponentielle et logarithme népérien. Applications.
36. Intégrales, primitives.
37. Exemples de calculs d'intégrales (méthodes exactes, méthodes approchées).
38. Exemples de résolution d'équations (méthodes exactes, méthodes approchées).
39. Problèmes conduisant à une modélisation par des suites ou par des fonctions.

5.2 Option informatique

L’option informatique ne sera pas proposée aux candidats lors des sessions 2020 et 2021, en raison de l'ouverture du CAPES numérique et sciences informatiques.

6 Annexe

Les sujets des épreuves écrites sont disponibles sur le serveur SIAC2.

La liste des sujets de l'épreuve de mise en situation professionnelle est publiée chaque année, bien avant la tenue des épreuves. Cette liste est disponible sur le site du concours, dans la rubrique épreuves orales, puis dans la rubrique archives.

Les sujets de l'épreuve sur dossier ne sont publiés sur le site du concours qu'après la session, en page d'accueil, puis dans la rubrique archives du concours.

Pendant le temps de préparation de chaque épreuve orale, les candidats ont à leur disposition des ressources numériques de diverses natures : textes réglementaires, ressources d'accompagnement des programmes, logiciels, manuels numériques. On trouvera la liste de toutes ces ressources sur le site du concours, rubrique des épreuves orales.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations.
On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Pour $z \in \mathbb{C}$, on note le conjugué de z par $\overline{z}$.
Pour n un entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes, à coefficients complexes. L'ensemble des matrices inversibles pour la multiplication matricielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est noté $GL_n(\mathbb{C})$.

Partie A : rotations et translations du plan

On se place dans un plan euclidien orienté $\mathcal{P}$, muni d'un repère orthonormé direct.

Notations.
Soit θ un nombre réel non congru à 0 modulo 2π et Ω un point de $\mathcal{P}$. La rotation de centre Ω et d'angle θ est notée $r_{\Omega,\theta}$.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathcal{P}$. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est notée $t_{\overrightarrow{u}}$.

I. Question de cours. Soient θ un nombre réel non congru à 0 modulo 2π, Ω un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathcal{P}$. L'affixe de Ω est notée ω et l'affixe de $\overrightarrow{u}$ est notée $z_{\overrightarrow{u}}$. Soit M un point de $\mathcal{P}$, d'affixe z. Déterminer l'affixe z' de l'image de M par $t_{\overrightarrow{u}}$. Déterminer l'affixe z'' de l'image de M par $r_{\Omega,\theta}$.

II. Soient a un nombre complexe de module 1 et b un nombre complexe. On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui a tout point d'affixe z associe le point d'affixe $az+b$.

1. Montrer que si $a = 1$, alors f est une translation dont on précisera le vecteur.

2. On suppose dans cette question que $a \neq 1$.

a. Montrer que f possède un unique point fixe Ω dont on précisera l'affixe ω.

b. Montrer que l'image par f du point M d'affixe z est le point d'affixe

$$a(z-\omega)+\omega.$$

c. Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

III. Soient a_1 et a_2 deux nombres complexes de module 1 et b_1 et b_2 deux nombres complexes. On considère l'application f_1, respectivement f_2, de $\mathcal{P}$ dans lui-même, envoyant le point d'affixe z sur le point d'affixe a_1z+b_1, respectivement a_2z+b_2.

1. Soit $f = f_1 \circ f_2$. Pour tout point M d'affixe z, calculer l'affixe de $f(M)$.

2. Montrer que f est une translation ou une rotation.

IV. Soient r_1 la rotation de centre d'affixe 1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre d'affixe 0 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$.

V. On considère l'ensemble G formé des rotations de $\mathcal{P}$ et des translations de $\mathcal{P}$. Montrer que G est un groupe pour une loi que l'on précisera.

Partie B : une construction géométrique

On se place de nouveau dans le plan euclidien orienté $\mathcal{P}$. On a montré dans la partie précédente que, sous certaines conditions, la composée de deux rotations est une rotation. On cherche ici à construire le centre de cette rotation.

Notations.
Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$. La symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}$ est notée $s_{\mathcal{D}}$.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathcal{P}$, on note $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'angle orienté de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

VI. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites du plan, sécantes en un point Ω. On désigne par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, respectivement. On considère l'application $f = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$.

1. Montrer que Ω est un point fixe de f.

2. Soit M un point de $\mathcal{P}$ distinct de Ω. Soient $M' = s_{\mathcal{D}_1}(M)$ et $M'' = s_{\mathcal{D}_2}(M')$. Montrer que les angles $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{u_1})$ et $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{\Omega M'})$ sont égaux. On montrerait de même que les angles $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{u_2})$ et $(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{\Omega M''})$ sont égaux.

3. Montrer que $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) \equiv 2(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})[2\pi]$.

4. Montrer que $\Omega M = \Omega M' = \Omega M''$.

5. Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

VII. Soient r_1 et r_2 deux rotations, de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 et d'angles respectifs θ_1 et θ_2. On suppose $\Omega_1 \neq \Omega_2$.

1. Déterminer deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ telles que $r_1 = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{(\Omega_1\Omega_2)}$ et $r_2 = s_{(\Omega_1\Omega_2)} \circ s_{\mathcal{D}_2}$.

2. Montrer que $r_1 \circ r_2 = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{\mathcal{D}_2}$.

3. On suppose $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes en un point Ω. Montrer qu'alors $r_1 \circ r_2$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

4. Donner une construction à la règle et au compas du centre de la rotation $r_1 \circ r_2$ lorsque r_1 est la rotation de centre d'affixe i et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r_2 est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

5. Que se passe t-il si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles ?

Partie C : structure des quaternions

Soient a et b deux nombres complexes. On note $M(a, b)$ la matrice complexe suivante :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $M(a, b)$ est appelée un quaternion. On considère en particulier les quaternions suivants :

$$E = M(1,0), \qquad I = M(i,0), \qquad J = M(0,1), \qquad K = M(0,i).$$

On veillera à ne pas confondre la matrice $I = M(i, 0)$ avec la matrice identité d'ordre 2, $I_2 = E$.

On note $\mathbb{H} = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$.

VIII. **1.** Donner sans justification une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ puis une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, dont une base est (E, I, J, K).

En conséquence, tout quaternion q s'écrit de manière unique $q = xE+yI+zJ+tK$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

3. Pour a, b, a', b' des nombres complexes, calculer $M(a, b)M(a', b')$. En déduire que $\mathbb{H}$ est stable par la multiplication matricielle.

IX. **1.** Calculer les produits deux à deux des matrices E, I, J et K. On présentera les résultats dans un tableau à double entrée.

2. La multiplication dans $\mathbb{H}$ est-elle commutative ?

X. Montrer que tout quaternion $q = M(a, b)$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, est un élément de $GL_2(\mathbb{C})$ dont l'inverse q^{-1} est un quaternion.

XI. Montrer que $\{q \in \mathbb{H} \mid \forall r \in \mathbb{H}, qr = rq\} = \{xE \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Partie D : conjugué, parties réelle et imaginaire d'un quaternion

Soit $q = xE + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. On définit le quaternion conjugué de q, noté q^*, par :

$$q^* = xE - yI - zJ - tK.$$

On définit la partie réelle de q, notée $\mathcal{R}e(q)$, par $\mathcal{R}e(q) = xE$.
On définit la partie imaginaire de q, notée $\mathcal{I}m(q)$, par $\mathcal{I}m(q) = yI + zJ + tK$.
On définit l'ensemble des quaternions purs, noté $\mathbb{H}_{pur}$, par $\mathbb{H}_{pur} = \{q \in \mathbb{H} \mid \mathcal{R}e(q) = 0\}$.

XII. **1.** Soit q un quaternion. Montrer que q^* est la transposée de la matrice obtenue en conjugant tous les coefficients de q.

2. En déduire que, pour tous quaternions q, r, $(qr)^* = r^*q^*$.

XIII. Pour tout quaternion q, on pose $N(q) = qq^*$.

1. Montrer que, pour tout quaternion $q = xE + yI + zJ + tK$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, $N(q) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)E$.

2. Montrer que, pour tous quaternions q, r, $N(qr) = N(q)N(r)$.

Partie E : norme sur $\mathbb{H}$

On admet qu'on définit une norme euclidienne sur $\mathbb{H}$ de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ q = xE + yI + zJ + tK & \mapsto & ||q|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} \end{array} \right.$$

XIV. Quel est le produit scalaire associé à cette norme euclidienne ?

XV. **1.** Montrer que, pour tout quaternion q, $N(q) = ||q||^2 E$.

2. En déduire que, pour tous quaternions q, r, $||qr|| = ||q|| \times ||r||$.

3. En déduire que pour tout quaternion non nul q, $||q^{-1}|| = \dfrac{1}{||q||}$.

XVI. On considère l'application suivante :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{H}_{pur} \\ \overrightarrow{q} = (y, z, t) & \mapsto & q = yI + zJ + tK. \end{array} \right.$$

Le quaternion pur $\psi(\overrightarrow{q})$ est appelé quaternion pur associé au vecteur $\overrightarrow{q}$. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et est supposé orienté. Son produit scalaire est noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. De plus, $\mathbb{H}_{pur}$ est muni de la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{H}$.

1. Montrer que ψ est une isométrie, c'est-à-dire que pour tout $\overrightarrow{q} \in \mathbb{R}^3$,

$$||\psi(\overrightarrow{q})|| = ||\overrightarrow{q}||.$$

2. Soient $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_{pur}$, respectivement associés aux vecteurs $\overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q_2}$. Montrer que $\mathcal{R}e(q_1q_2) = -\langle \overrightarrow{q_1} \mid \overrightarrow{q_2} \rangle E$ et que $\mathcal{I}m(q_1q_2) = \psi(\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2})$, où $\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}$ désigne le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q_2}$.

3. Soit $q \in \mathbb{H}_{pur}$. Calculer $\mathcal{R}e(q^2)$ et $\mathcal{I}m(q^2)$. En déduire q^2.

4. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $q \in \mathbb{H}_{pur}$. Calculer $(aE + bq)(cE + dq)$.

5. Soient q_1 et q_2 deux quaternions purs, respectivement associés aux vecteurs $\overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q_2}$. Montrer que $\langle \overrightarrow{q_1} \mid \overrightarrow{q_2} \rangle = 0$ si et seulement si $q_1q_2 + q_2q_1 = 0$.

Partie F : quaternions unitaires et rotations vectorielles

On note $U = \{q \in \mathbb{H} \mid N(q) = E\}$. Les éléments de U sont appelés quaternions unitaires.

XVII. Montrer que U est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.

XVIII. Soit $p \in U$.

1. Montrer qu'il existe un nombre réel θ et un quaternion $u \in U \cap \mathbb{H}_{pur}$ tel que

$$p = \cos(\theta)E + \sin(\theta)u.$$

2. Vérifier que $p^{-1} = p^* = \cos(\theta)E - \sin(\theta)u$.

XIX. Soit $p \in U$. On définit l'application suivante :

$$r_p : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ q & \mapsto & pqp^{-1}. \end{array} \right.$$

1. Montrer que r_p est une application linéaire.

2. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{H}$, $||r_p(q)|| = ||q||$.

3. Soient p_1 et p_2 deux éléments de U. Montrer que $r_{p_1} \circ r_{p_2} = r_{p_1p_2}$. En déduire que pour tout $p \in U$, r_p est une bijection d'inverse $r_{p^{-1}}$.

4. Montrer que r_p est égale à l'identité de $\mathbb{H}$ si et seulement si $p = E$ ou $p = -E$.

5. Soient p_1 et p_2 deux quaternions unitaires. Déduire de la question précédente que $r_{p_1} = r_{p_2}$ si et seulement si $p_1 = p_2$ ou $p_1 = -p_2$.

XX. On suppose maintenant que p est un quaternion unitaire différent de E et de $-E$. D'après la question XVIII. 1., le quaternion p s'écrit sous la forme $p = \cos(\theta)E + \sin(\theta)u$, où θ est un nombre réel u est un quaternion pur unitaire. On associe à u le vecteur $\overrightarrow{u}$ par l'application ψ définie dans la question XVI.

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$. On pose $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. On note v et w les quaternions purs associés aux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

1. Que peut-on dire de la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$?
2. Montrer que $uv = -vu = w$, $uw = -wu = -v$, $u^2 = -E$ et que $u^3 = -u$.
3. Calculer $r_p(u)$, $r_p(v)$ et $r_p(w)$.
4. Montrer qu'il existe une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ notée R, dont on précisera l'axe et l'angle, telle que pour tout $q \in \mathbb{H}_{pur}$, si $q = \psi(\overrightarrow{q})$, alors $r_p(q) = \psi(R(\overrightarrow{q}))$.

XXI. Soit R une rotation vectorielle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, d'axe la droite D dirigée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{d}$ et d'angle ϕ. Montrer qu'il existe $p \in U$ tel que pour tout $q \in \mathbb{H}_{pur}$, si $q = \psi(\overrightarrow{q})$, alors $r_p(q) = \psi(R(\overrightarrow{q}))$.

XXII. Application. Soient R_1 la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et d'axe engendré par $(1, -1, -1)$ et R_2 la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle π et d'axe engendrée par $(0, 1, 0)$. Montrer que $R_2 \circ R_1$ et $R_1 \circ R_2$ sont des rotations dont on précisera les axes et les angles.

Problème n° 2

Notations.
On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si A et B sont deux événements de Ω avec B de probabilité non nulle, la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est notée $\mathbb{P}_B(A)$.
Soient k et n des entiers naturels, avec $0 \leqslant k \leqslant n$. Le coefficient binomial donnant le nombre de parties à k éléments est noté $\dbinom{n}{k}$.

On utilisera la convention $0^0 = 1$ dans tout le problème.

Partie A : quelques études de séries

I. 1. Montrer que, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x différent de 1,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

2. En déduire, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel x différent de 1, une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

3. Soit $x \in]-1\,;1[$. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ et donner la valeur de sa somme.

II. Soit k un entier naturel. On considère la série entière

$$S_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

1. Calculer le rayon de convergence de $S_k(x)$.

2. Montrer que S_k est dérivable sur $]-1\,;1[$ et que, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$S_k'(x) = (k+1)S_{k+1}(x).$$

3. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$S_k(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

4. Soit $x \in]-1\,;1[$. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^2 x^{n-1}$ et montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3}.$$

Indication : on pourra écrire n^2 en fonction de $\dbinom{n}{1}$ et de $\dbinom{n}{2}$.

III. Application : soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit p un réel de $]0\,;1[$. Soit X une variable aléatoire discrète suivant la loi géométrique de paramètre p, c'est-à-dire une variable aléatoire définie sur Ω, telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

1. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

2. Montrer que X^2 admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que X admet une variance et la calculer.

Partie B : étude d'une séance de tir à l'arc

On considère deux archers A_1 et A_2 qui tirent chacun sur une cible de manière indépendante. L'archer A_1 (respectivement A_2) touche sa cible avec une probabilité p_1 (respectivement p_2) strictement comprise entre 0 et 1. On suppose de plus que les tirs des joueurs sont indépendants les uns des autres. On appelle X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire donnant le nombre de tirs nécessaires à l'archer A_1 (respectivement A_2) pour qu'il touche sa cible pour la première fois. On note $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.

IV. Déterminer les valeurs possibles prises par X_1.

V. On introduit, pour tout entier naturel non nul i, l'événement E_i : « le joueur A_1 touche la cible à son i-ème tir ».
Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(X_1 = k)$ à l'aide des événements E_i, $i \in \mathbb{N}^*$.

VI. En déduire la loi de X_1.

VII. **1.** Pour tout entier naturel non nul k, calculer $\mathbb{P}(X_1 > k)$.

2. Montrer que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}_{(X_1 > m)}(X_1 > n + m) = \mathbb{P}(X_1 > n).$$

VIII. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$.

IX. Calculer $\mathbb{P}(X_1 > X_2)$.

X. Que vaut $\mathbb{P}(X_2 > X_1)$?

XI. On réalise à présent une deuxième expérience avec les deux archers A_1 et A_2 de la manière suivante : l'archer A_1 tire jusqu'à ce qu'il touche sa cible. On appelle X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de tirs effectués par le joueur A_1 pour qu'il touche sa cible pour la première fois. Ensuite, si X_1 prend la valeur n, l'archer A_2 effectue n tirs en direction de sa cible dans les mêmes conditions que la première expérience.
On définit alors la variable aléatoire G égale au nombre de fois où la cible a été touchée par l'archer A_2. On suppose dans cette partie que $p_1 = p_2$ et on note

$$p = p_1 = p_2, \qquad\qquad q = 1 - p = 1 - p_1 = 1 - p_2.$$

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_1 = n)}(G = k)$.
On distinguera les cas $k > n$ et $k \leqslant n$.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(G = k) = q^{k-1} p^{k+1} \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} q^{2n-2k}$.

3. En utilisant la partie **A.**, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(G = k) = \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} \times \frac{1}{(1+q)^2}.$$

4. Montrer que G admet une espérance et que celle-ci vaut 1. Interpréter ce résultat.

Partie C : étude d'une variable discrète sans mémoire

Soit Y une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, $\mathbb{P}(Y \geqslant n) > 0$.
On suppose également que Y est sans mémoire c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{(Y \geqslant m)}(Y \geqslant n+m) = \mathbb{P}(Y \geqslant n).$$

On pose $\mathbb{P}(Y = 0) = p$ et $q = 1 - p$.

XII. Montrer que $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = q$. En déduire que $0 < q \leqslant 1$.

XIII. Montrer que pour tout couple (m,n) d'entiers naturels,

$$\mathbb{P}(Y \geqslant n+m) = \mathbb{P}(Y \geqslant m)\mathbb{P}(Y \geqslant n).$$

XIV. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{P}(Y \geqslant n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer $\mathbb{P}(Y \geqslant n)$ en fonction de n et de q.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y \geqslant n) - \mathbb{P}(Y \geqslant n+1)$.

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = n) = q^n p$.

5. En déduire que q est différent de 1.

XV. Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire $Y + 1$.

XVI. Conclure que Y est sans mémoire si et seulement si $Y + 1$ est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$.

Partie D : taux de panne d'une variable discrète

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel n,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) > 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle taux de panne de Z à l'instant n, le réel noté λ_n défini par

$$\lambda_n = \mathbb{P}_{(Z \geqslant n)}(Z = n).$$

XVII. **1.** Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$1 - \lambda_n = \frac{\mathbb{P}(Z \geqslant n+1)}{\mathbb{P}(Z \geqslant n)}.$$

2. Vérifier alors que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant \lambda_n < 1$.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - \lambda_k).$$

XVIII. **1.** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Z = k) = 1 - \mathbb{P}(Z \geqslant n).$$

2. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant n)$ existe et vaut 0.

3. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \ln(1 - \lambda_n)$?

4. Que dire alors de la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \lambda_n$?

XIX. On suppose maintenant qu'il existe un nombre réel c tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = c$. Ce réel est appelé taux de panne de Z.

1. Montrer que $0 \leqslant c < 1$.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer $\mathbb{P}(Z \geqslant n)$ en fonction de c et de n.

3. Montrer que c est non nul.

4. En déduire une caractérisation des variables aléatoires ayant un taux de panne constant.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations.
On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Pour $z \in \mathbb{C}$, on note le conjugué de z par $\overline{z}$.
Pour n un entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes, à coefficients complexes. L'ensemble des matrices inversibles pour la multiplication matricielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est noté $GL_n(\mathbb{C})$.

Partie A : rotations et translations du plan

On se place dans un plan euclidien orienté $\mathcal{P}$, muni d'un repère orthonormé direct.

Notations.
Soit θ un nombre réel non congru à 0 modulo 2π et Ω un point de $\mathcal{P}$. La rotation de centre Ω et d'angle θ est notée $r_{\Omega,\theta}$.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathcal{P}$. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est notée $t_{\overrightarrow{u}}$.

I. **Question de cours.** Soient θ un nombre réel non congru à 0 modulo 2π, Ω un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathcal{P}$. L'affixe de Ω est notée ω et l'affixe de $\overrightarrow{u}$ est notée $z_{\overrightarrow{u}}$. Soit M un point de $\mathcal{P}$, d'affixe z. Déterminer l'affixe z' de l'image de M par $t_{\overrightarrow{u}}$. Déterminer l'affixe z'' de l'image de M par $r_{\Omega,\theta}$.

II. Soient a un nombre complexe de module 1 et b un nombre complexe. On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui a tout point d'affixe z associe le point d'affixe $az + b$.

1. Montrer que si $a = 1$, alors f est une translation dont on précisera le vecteur.

2. On suppose dans cette question que $a \neq 1$.

a. Montrer que f possède un unique point fixe Ω dont on précisera l'affixe ω.

b. Montrer que l'image par f du point M d'affixe z est le point d'affixe

$$a(z - \omega) + \omega.$$

c. Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

III. Soient a_1 et a_2 deux nombres complexes de module 1 et b_1 et b_2 deux nombres complexes. On considère l'application f_1, respectivement f_2, de $\mathcal{P}$ dans lui-même, envoyant le point d'affixe z sur le point d'affixe $a_1 z + b_1$, respectivement $a_2 z + b_2$.

1. Soit $f = f_1 \circ f_2$. Pour tout point M d'affixe z, calculer l'affixe de $f(M)$.

2. Montrer que f est une translation ou une rotation.

IV. Soient r_1 la rotation de centre d'affixe 1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre d'affixe 0 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$.

V. On considère l'ensemble G formé des rotations de $\mathcal{P}$ et des translations de $\mathcal{P}$. Montrer que G est un groupe pour une loi que l'on précisera.

Partie B : une construction géométrique

On se place de nouveau dans le plan euclidien orienté $\mathcal{P}$. On a montré dans la partie précédente que, sous certaines conditions, la composée de deux rotations est une rotation. On cherche ici à construire le centre de cette rotation.

Notations.
Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$. La symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}$ est notée $s_{\mathcal{D}}$.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathcal{P}$, on note $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'angle orienté de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

VI. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites du plan, sécantes en un point Ω. On désigne par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, respectivement. On considère l'application $f = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$.

1. Montrer que Ω est un point fixe de f.
2. Soit M un point de $\mathcal{P}$ distinct de Ω. Soient $M' = s_{\mathcal{D}_1}(M)$ et $M'' = s_{\mathcal{D}_2}(M')$. Montrer que les angles $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{u_1})$ et $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{\Omega M'})$ sont égaux. On montrerait de même que les angles $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{u_2})$ et $(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{\Omega M''})$ sont égaux.
3. Montrer que $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}) \equiv 2(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})[2\pi]$.
4. Montrer que $\Omega M = \Omega M' = \Omega M''$.
5. Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

VII. Soient r_1 et r_2 deux rotations, de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 et d'angles respectifs θ_1 et θ_2. On suppose $\Omega_1 \neq \Omega_2$.

1. Déterminer deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ telles que $r_1 = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{(\Omega_1\Omega_2)}$ et $r_2 = s_{(\Omega_1\Omega_2)} \circ s_{\mathcal{D}_2}$.
2. Montrer que $r_1 \circ r_2 = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{\mathcal{D}_2}$.
3. On suppose $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes en un point Ω. Montrer qu'alors $r_1 \circ r_2$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
4. Donner une construction à la règle et au compas du centre de la rotation $r_1 \circ r_2$ lorsque r_1 est la rotation de centre d'affixe i et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r_2 est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
5. Que se passe t-il si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles ?

Partie C : structure des quaternions

Soient a et b deux nombres complexes. On note $M(a, b)$ la matrice complexe suivante :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $M(a, b)$ est appelée un quaternion. On considère en particulier les quaternions suivants :

$$E = M(1,0), \qquad I = M(i,0), \qquad J = M(0,1), \qquad K = M(0,i).$$

On veillera à ne pas confondre la matrice $I = M(i, 0)$ avec la matrice identité d'ordre 2, $I_2 = E$.

On note $\mathbb{H} = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$.

VIII. **1.** Donner sans justification une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ puis une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, dont une base est (E, I, J, K).

En conséquence, tout quaternion q s'écrit de manière unique $q = xE+yI+zJ+tK$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

3. Pour a, b, a', b' des nombres complexes, calculer $M(a, b)M(a', b')$. En déduire que $\mathbb{H}$ est stable par la multiplication matricielle.

IX. **1.** Calculer les produits deux à deux des matrices E, I, J et K. On présentera les résultats dans un tableau à double entrée.

2. La multiplication dans $\mathbb{H}$ est-elle commutative ?

X. Montrer que tout quaternion $q = M(a, b)$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, est un élément de $GL_2(\mathbb{C})$ dont l'inverse q^{-1} est un quaternion.

XI. Montrer que $\{q \in \mathbb{H} \mid \forall r \in \mathbb{H}, qr = rq\} = \{xE \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Partie D : conjugué, parties réelle et imaginaire d'un quaternion

Soit $q = xE + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. On définit le quaternion conjugué de q, noté q^*, par :

$$q^* = xE - yI - zJ - tK.$$

On définit la partie réelle de q, notée $\mathcal{R}e(q)$, par $\mathcal{R}e(q) = xE$.
On définit la partie imaginaire de q, notée $\mathcal{I}m(q)$, par $\mathcal{I}m(q) = yI + zJ + tK$.
On définit l'ensemble des quaternions purs, noté $\mathbb{H}_{pur}$, par $\mathbb{H}_{pur} = \{q \in \mathbb{H} \mid \mathcal{R}e(q) = 0\}$.

XII. **1.** Soit q un quaternion. Montrer que q^* est la transposée de la matrice obtenue en conjugant tous les coefficients de q.

2. En déduire que, pour tous quaternions q, r, $(qr)^* = r^*q^*$.

XIII. Pour tout quaternion q, on pose $N(q) = qq^*$.

1. Montrer que, pour tout quaternion $q = xE + yI + zJ + tK$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, $N(q) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)E$.

2. Montrer que, pour tous quaternions q, r, $N(qr) = N(q)N(r)$.

Partie E : norme sur $\mathbb{H}$

On admet qu'on définit une norme euclidienne sur $\mathbb{H}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{H} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ q = xE + yI + zJ + tK & \mapsto \quad ||q|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} \end{cases}$$

XIV. Quel est le produit scalaire associé à cette norme euclidienne ?

XV. **1.** Montrer que, pour tout quaternion q, $N(q) = ||q||^2 E$.

2. En déduire que, pour tous quaternions q, r, $||qr|| = ||q|| \times ||r||$.

3. En déduire que pour tout quaternion non nul q, $||q^{-1}|| = \dfrac{1}{||q||}$.

XVI. On considère l'application suivante :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{H}_{pur} \\ \overrightarrow{q} = (y, z, t) & \mapsto & q = yI + zJ + tK. \end{array} \right.$$

Le quaternion pur $\psi(\overrightarrow{q})$ est appelé quaternion pur associé au vecteur $\overrightarrow{q}$. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et est supposé orienté. Son produit scalaire est noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. De plus, $\mathbb{H}_{pur}$ est muni de la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{H}$.

1. Montrer que ψ est une isométrie, c'est-à-dire que pour tout $\overrightarrow{q} \in \mathbb{R}^3$,

$$||\psi(\overrightarrow{q})|| = ||\overrightarrow{q}||.$$

2. Soient $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_{pur}$, respectivement associés aux vecteurs $\overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q_2}$. Montrer que $\mathcal{R}e(q_1q_2) = -\langle \overrightarrow{q_1} \mid \overrightarrow{q_2} \rangle E$ et que $\mathcal{I}m(q_1q_2) = \psi(\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2})$, où $\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}$ désigne le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q_2}$.

3. Soit $q \in \mathbb{H}_{pur}$. Calculer $\mathcal{R}e(q^2)$ et $\mathcal{I}m(q^2)$. En déduire q^2.

4. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $q \in \mathbb{H}_{pur}$. Calculer $(aE + bq)(cE + dq)$.

5. Soient q_1 et q_2 deux quaternions purs, respectivement associés aux vecteurs $\overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q_2}$. Montrer que $\langle \overrightarrow{q_1} \mid \overrightarrow{q_2} \rangle = 0$ si et seulement si $q_1q_2 + q_2q_1 = 0$.

Partie F : quaternions unitaires et rotations vectorielles

On note $U = \{q \in \mathbb{H} \mid N(q) = E\}$. Les éléments de U sont appelés quaternions unitaires.

XVII. Montrer que U est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$.

XVIII. Soit $p \in U$.

1. Montrer qu'il existe un nombre réel θ et un quaternion $u \in U \cap \mathbb{H}_{pur}$ tel que

$$p = \cos(\theta)E + \sin(\theta)u.$$

2. Vérifier que $p^{-1} = p^* = \cos(\theta)E - \sin(\theta)u$.

XIX. Soit $p \in U$. On définit l'application suivante :

$$r_p : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ q & \mapsto & pqp^{-1}. \end{array} \right.$$

1. Montrer que r_p est une application linéaire.

2. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{H}$, $||r_p(q)|| = ||q||$.

3. Soient p_1 et p_2 deux éléments de U. Montrer que $r_{p_1} \circ r_{p_2} = r_{p_1p_2}$. En déduire que pour tout $p \in U$, r_p est une bijection d'inverse $r_{p^{-1}}$.

4. Montrer que r_p est égale à l'identité de $\mathbb{H}$ si et seulement si $p = E$ ou $p = -E$.

5. Soient p_1 et p_2 deux quaternions unitaires. Déduire de la question précédente que $r_{p_1} = r_{p_2}$ si et seulement si $p_1 = p_2$ ou $p_1 = -p_2$.

XX. On suppose maintenant que p est un quaternion unitaire différent de E et de $-E$. D'après la question XVIII. 1., le quaternion p s'écrit sous la forme $p = \cos(\theta)E + \sin(\theta)u$, où θ est un nombre réel u est un quaternion pur unitaire. On associe à u le vecteur $\overrightarrow{u}$ par l'application ψ définie dans la question XVI.

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$. On pose $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. On note v et w les quaternions purs associés aux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

1. Que peut-on dire de la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$?

2. Montrer que $uv = -vu = w$, $uw = -wu = -v$, $u^2 = -E$ et que $u^3 = -u$.

3. Calculer $r_p(u)$, $r_p(v)$ et $r_p(w)$.

4. Montrer qu'il existe une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ notée R, dont on précisera l'axe et l'angle, telle que pour tout $q \in \mathbb{H}_{pur}$, si $q = \psi(\overrightarrow{q})$, alors $r_p(q) = \psi(R(\overrightarrow{q}))$.

XXI. Soit R une rotation vectorielle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, d'axe la droite D dirigée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{d}$ et d'angle ϕ. Montrer qu'il existe $p \in U$ tel que pour tout $q \in \mathbb{H}_{pur}$, si $q = \psi(\overrightarrow{q})$, alors $r_p(q) = \psi(R(\overrightarrow{q}))$.

XXII. **Application**. Soient R_1 la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et d'axe engendré par $(1, -1, -1)$ et R_2 la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle π et d'axe engendrée par $(0, 1, 0)$. Montrer que $R_2 \circ R_1$ et $R_1 \circ R_2$ sont des rotations dont on précisera les axes et les angles.

Problème n° 2

Notations.
On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si A et B sont deux événements de Ω avec B de probabilité non nulle, la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est notée $\mathbb{P}_B(A)$.
Soient k et n des entiers naturels, avec $0 \leqslant k \leqslant n$. Le coefficient binomial donnant le nombre de parties à k éléments est noté $\binom{n}{k}$.

On utilisera la convention $0^0 = 1$ dans tout le problème.

Partie A : quelques études de séries

I. 1. Montrer que, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x différent de 1,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

2. En déduire, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel x différent de 1, une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

3. Soit $x \in]-1\,;1[$. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ et donner la valeur de sa somme.

II. Soit k un entier naturel. On considère la série entière

$$S_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

1. Calculer le rayon de convergence de $S_k(x)$.

2. Montrer que S_k est dérivable sur $]-1\,;1[$ et que, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$S_k'(x) = (k+1)S_{k+1}(x).$$

3. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$S_k(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

4. Soit $x \in]-1\,;1[$. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} n^2 x^{n-1}$ et montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3}.$$

Indication : on pourra écrire n^2 en fonction de $\binom{n}{1}$ et de $\binom{n}{2}$.

III. Application : soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit p un réel de $]0\,;1[$. Soit X une variable aléatoire discrète suivant la loi géométrique de paramètre p, c'est-à-dire une variable aléatoire définie sur Ω, telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

1. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

2. Montrer que X^2 admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que X admet une variance et la calculer.

Partie B : étude d'une séance de tir à l'arc

On considère deux archers A_1 et A_2 qui tirent chacun sur une cible de manière indépendante. L'archer A_1 (respectivement A_2) touche sa cible avec une probabilité p_1 (respectivement p_2) strictement comprise entre 0 et 1. On suppose de plus que les tirs des joueurs sont indépendants les uns des autres. On appelle X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire donnant le nombre de tirs nécessaires à l'archer A_1 (respectivement A_2) pour qu'il touche sa cible pour la première fois. On note $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.

IV. Déterminer les valeurs possibles prises par X_1.

V. On introduit, pour tout entier naturel non nul i, l'événement E_i : « le joueur A_1 touche la cible à son i-ème tir ».
Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(X_1 = k)$ à l'aide des événements E_i, $i \in \mathbb{N}^*$.

VI. En déduire la loi de X_1.

VII. **1.** Pour tout entier naturel non nul k, calculer $\mathbb{P}(X_1 > k)$.

2. Montrer que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}_{(X_1 > m)}(X_1 > n + m) = \mathbb{P}(X_1 > n).$$

VIII. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$.

IX. Calculer $\mathbb{P}(X_1 > X_2)$.

X. Que vaut $\mathbb{P}(X_2 > X_1)$?

XI. On réalise à présent une deuxième expérience avec les deux archers A_1 et A_2 de la manière suivante : l'archer A_1 tire jusqu'à ce qu'il touche sa cible. On appelle X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de tirs effectués par le joueur A_1 pour qu'il touche sa cible pour la première fois. Ensuite, si X_1 prend la valeur n, l'archer A_2 effectue n tirs en direction de sa cible dans les mêmes conditions que la première expérience.
On définit alors la variable aléatoire G égale au nombre de fois où la cible a été touchée par l'archer A_2. On suppose dans cette partie que $p_1 = p_2$ et on note

$$p = p_1 = p_2, \qquad q = 1 - p = 1 - p_1 = 1 - p_2.$$

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_1 = n)}(G = k)$. On distinguera les cas $k > n$ et $k \leqslant n$.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(G = k) = q^{k-1} p^{k+1} \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} q^{2n-2k}$.

3. En utilisant la partie **A.**, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(G = k) = \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} \times \frac{1}{(1+q)^2}.$$

4. Montrer que G admet une espérance et que celle-ci vaut 1. Interpréter ce résultat.

Partie C : étude d'une variable discrète sans mémoire

Soit Y une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, $\mathbb{P}(Y \geqslant n) > 0$.
On suppose également que Y est sans mémoire c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{(Y \geqslant m)}(Y \geqslant n+m) = \mathbb{P}(Y \geqslant n).$$

On pose $\mathbb{P}(Y = 0) = p$ et $q = 1 - p$.

XII. Montrer que $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = q$. En déduire que $0 < q \leqslant 1$.

XIII. Montrer que pour tout couple (m,n) d'entiers naturels,

$$\mathbb{P}(Y \geqslant n+m) = \mathbb{P}(Y \geqslant m)\mathbb{P}(Y \geqslant n).$$

XIV. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{P}(Y \geqslant n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer $\mathbb{P}(Y \geqslant n)$ en fonction de n et de q.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y \geqslant n) - \mathbb{P}(Y \geqslant n+1)$.

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = n) = q^n p$.

5. En déduire que q est différent de 1.

XV. Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire $Y + 1$.

XVI. Conclure que Y est sans mémoire si et seulement si $Y + 1$ est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0\,;1[$.

Partie D : taux de panne d'une variable discrète

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel n,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) > 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle taux de panne de Z à l'instant n, le réel noté λ_n défini par

$$\lambda_n = \mathbb{P}_{(Z \geqslant n)}(Z = n).$$

XVII. **1.** Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$1 - \lambda_n = \frac{\mathbb{P}(Z \geqslant n+1)}{\mathbb{P}(Z \geqslant n)}.$$

2. Vérifier alors que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant \lambda_n < 1$.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathbb{P}(Z \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k).$$

XVIII. **1.** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(Z=k) = 1-\mathbb{P}(Z \geqslant n).$$

2. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant n)$ existe et vaut 0.

3. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \ln(1-\lambda_n)$?

4. Que dire alors de la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \lambda_n$?

XIX. On suppose maintenant qu'il existe un nombre réel c tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = c$. Ce réel est appelé taux de panne de Z.

1. Montrer que $0 \leqslant c < 1$.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer $\mathbb{P}(Z \geqslant n)$ en fonction de c et de n.

3. Montrer que c est non nul.

4. En déduire une caractérisation des variables aléatoires ayant un taux de panne constant.

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

On rappelle que tous les programmes demandés doivent être rédigés dans le langage Python.

Problème 1 : base 3 équilibrée

Notation. $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.

En informatique, on utilise traditionnellement la base 2 pour représenter les entiers. Ce choix est dicté par la technologie utilisée par les ordinateurs actuels. Dans les années 60, d'autres technologies avaient été envisagées, dont l'utilisation d'une base de numération appelée base 3 équilibrée.

En base 3 classique, on écrit les nombres à l'aide de trois chiffres : 0, 1 et 2 : par exemple, $23 = \overline{212}^3 = 2 \times 3^2 + 1 \times 3 + 2$, $46 = \overline{1201}^3 = 1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3 + 1$.

En base 3 équilibrée, les « chiffres » utilisés sont 0, 1 et -1 :

$23 = \overline{10(-1)(-1)}^e = 1 \times 3^3 + 0 \times 3^2 - 1 \times 3 - 1$, $46 = \overline{1(-1)(-1)01}^e = 1 \times 3^4 - 1 \times 3^3 - 1 \times 3^2 + 0 \times 3 + 1$.

Dans toute la suite, on s'intéresse à l'écriture en base 3 équilibrée des entiers naturels **non nuls**. On note $C = \{-1, 0, 1\}$ l'ensemble des chiffres utilisés dans l'écriture en base 3 équilibrée.

L'écriture en base 3 équilibrée d'un entier naturel **non nul** sera notée comme ci-dessus, par la suite des chiffres surmontée d'un trait avec un exposant e. Si a_0, a_1, …, a_{p-1} sont dans C, on a donc :

$$\overline{a_0 a_1 \dots a_{p-1}}^e = \sum_{k=0}^{p-1} a_k 3^{p-1-k}.$$

L'écriture en base 3 équilibrée d'un entier naturel non nul, lue de gauche à droite, commence toujours par le chiffre 1.

Partie I – généralités

Question 1.

1.a Donner la valeur de $\overline{1(-1)0(-1)}^e$, de $\overline{1111}^e$ et de $\overline{1(-1)(-1)(-1)(-1)}^e$.

1.b Écrire en base 3 équilibrée les entiers de 1 à 9.

Question 2. Soit k un entier naturel.

Déterminer la valeur de $A_k = \overline{1\underbrace{11\dots1}_{k \text{ chiffres}}}^e$ et de $B_k = \overline{1\underbrace{(-1)(-1)\dots(-1)}_{k \text{ chiffres}}}^e$.

(On aura bien noté que ces deux écritures possèdent $k+1$ chiffres au total.)

Question 3. On représente l'écriture en base 3 équilibrée $\overline{a_0 \dots a_{p-1}}^e$ par la liste Python $[a_{p-1}, a_{p-2}, \dots, a_0]$ (attention, les chiffres sont écrits dans la liste en lisant de droite à gauche l'écriture en base 3 équilibrée, le dernier d'entre eux est donc toujours le chiffre 1).

Écrire une fonction `valeur(L)` qui prend en argument une liste de chiffres et renvoie l'entier naturel non nul dont c'est une écriture en base 3 équilibrée.

Par exemple `valeur([1,0,−1,−1,1])` renvoie l'entier 46.

Partie II – existence et unicité de l'écriture en base 3 équilibrée

Question 4. On veut montrer que tout entier naturel non nul n admet une écriture en base 3 équilibrée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note q et r le quotient et le reste dans la division euclidienne de n par 3 : $n = 3q + r$ et $r \in \{0, 1, 2\}$.

4.a On suppose que q est non nul et admet une écriture en base 3 équilibrée $q = \overline{a_0 \dots a_{p-1}}^e$. Déterminer une écriture en base 3 équilibrée de n dans le cas où $r = 0$ ou $r = 1$.

4.b On suppose que q est non nul et que $q+1$ admet une écriture en base 3 équilibrée $q + 1 = \overline{b_0 \dots b_{p-1}}^e$. Déterminer une écriture en base 3 équilibrée de n dans le cas où $r = 2$.

4.c Montrer par récurrence que tout entier naturel non nul admet une écriture en base 3 équilibrée.

Question 5. On souhaite écrire en Python une fonction incremente(L) qui prend en argument une liste L de chiffres représentant une écriture en base 3 équilibrée d'un entier naturel non nul n et qui renvoie une liste représentant une écriture en base 3 équilibrée de $n+1$.

5.a On propose la fonction récursive incrementeR(L) suivante.

Expliquer la ligne 9. Pourquoi a-t-il fallu écrire les lignes 1 et 2 ?

```
0 def incrementeR(L):
1     if len(L)==0:
2         return [1]
3     elif L[0]==0:
4         return [1]+L[1:]
5     elif L[0]==-1:
6         return [0]+L[1:]
7     else:
8         # ici L[0]==1
9         return [-1]+incrementeR(L[1:])
```

5.b On souhaite écrire une version non récursive incremente(L) de cette fonction.

Recopier et compléter le script suivant pour répondre à cette question :

```
def incremente(L):
    p = len(L)
    M = [] # liste finale
    k = 0
    while k < p and L[k] == 1:
        M.append(-1)
        k += 1
    if k == p:
        M.append (...)
    elif L[k] == 0:
        M.append (...)
        M = M + L[k+1:]
    elif L[k] == -1:
        ...
        ...
    return M
```

Question 6. On souhaite montrer que l'écriture en base 3 équilibrée d'un entier naturel n non nul est unique.

6.a Soit $a_0, \ldots, a_{p-1}$ des chiffres de C (avec $a_0 = 1$ et $p \geqslant 1$). Quel est le reste dans la division euclidienne par 3 du nombre $\overline{a_0 a_1 \ldots a_{p-1}}^e$?

6.b En déduire que l'écriture en base 3 équilibrée d'un entier naturel n non nul est unique.

Question 7. Écrire une fonction base3e(n) qui prend en argument un entier naturel n non nul et renvoie la liste L de chiffres qui correspond à l'écriture en base 3 équilibrée de n. Par exemple base3e(46) renvoie [1,0,−1,−1,1]).

Partie III – chemins de Delannoy

On considère le plan euclidien P rapporté à un repère orthonormé.

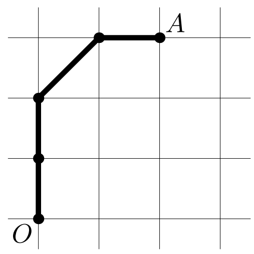
Un chemin de Delannoy du plan P est un arc suivant une ligne brisée partant de l'origine O et arrivant en un point A de coordonnées (a, b) où a et b sont deux entiers naturels, constituée d'arcs à choisir parmi trois types : un arc horizontal (associé au vecteur $(1, 0)$), un arc vertical (associé au vecteur $(0, 1)$) ou un arc diagonal (associé au vecteur $(1, 1)$). Dans le parcours d'un chemin de Delannoy, on va donc toujours vers la droite, vers le haut, ou en diagonale vers la droite et vers le haut en même temps.

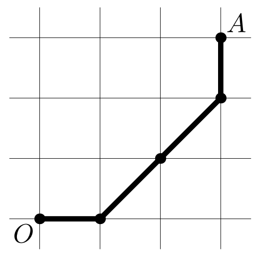
On associe à tout chemin de Delannoy un entier naturel non nul n défini par son écriture en base 3 équilibrée de la façon suivante : le premier chiffre de cette écriture est toujours égal à 1 (comme pour toute écriture en base 3 équilibrée), les chiffres suivants caractérisent les arcs consécutifs du chemin, le chiffre 1 est associé à un segment horizontal, le chiffre -1 à un arc vertical, et le chiffre 0 à un arc diagonal. Inversement à tout entier naturel non nul on peut associer le chemin de Delannoy qui est associé à son écriture en base 3 équilibrée.

On fera attention que le premier chiffre de l'écriture en base 3 équilibrée, toujours égal à 1, n'est pas pris en compte dans la construction du chemin.

Remarque : $n = 1 = \overline{1}^e$ est l'entier associé à un chemin de Delannoy de longueur nulle.

Par exemple, les entiers associés aux deux chemins de Delannoy ci-dessous sont respectivement $46 = \overline{1(-1)(-1)01}^e$ pour la figure de gauche et $107 = \overline{1100(-1)}^e$ pour la figure de droite.





Question 8.

8.a Dessiner le chemin de Delannoy associé à l'entier 2019.

8.b On note (a, b) les coordonnées entières du point d'arrivée d'un chemin de Delannoy. Écrire la fonction `arrivee(n)` qui renvoie ce couple de coordonnées quand on lui donne en argument l'entier non nul n associé au chemin de Delannoy. Par exemple `arrivee(46)` renvoie le couple `(2, 3)` et `arrivee(107)` renvoie le couple `(3, 3)`.

On pourra s'inspirer de la fonction `base3e`.

Question 9.

Soit a et b deux entiers naturels, et A le point de coordonnées (a, b). Il existe plusieurs chemins de Delannoy allant de l'origine au point A, chacun d'eux étant associé à un entier naturel. Soit $N(a, b)$ l'ensemble de ces entiers.

9.a Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\min N(a, a)$ et $\max N(a, a)$.

9.b On suppose que les entiers a et b vérifient $0 < a < b$. Déterminer $\min N(a, b)$ et $\max N(a, b)$.

Problème 2 : compilation et algorithmes

Notation. Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

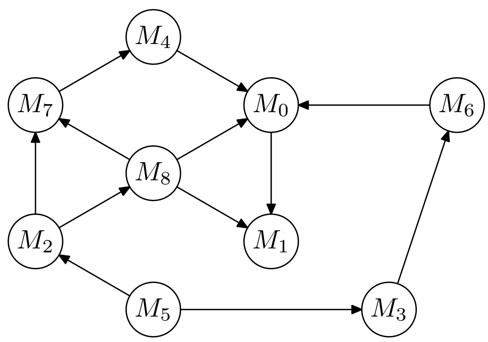
Partie A – ordre topologique sur un graphe

Lors de l'écriture d'un programme complexe, on le découpe souvent en modules distincts, mais dépendants les uns des autres. Le compilateur a besoin de connaître l'ordre dans lequel compiler ces modules. Pour ce faire, on utilise un graphe de dépendances, que nous décrivons brièvement ici.

On suppose qu'on dispose de n modules numérotés M_0, M_1, …, M_{n-1} et on représente leurs relations de dépendance à l'aide d'un graphe Γ dont les sommets sont les modules, et dont une arête allant du module M_i au module M_j indique que le module M_i doit être compilé avant le module M_j.

Par exemple, avec $n = 9$, aux contraintes du tableau de gauche ci-dessous, on peut associer le graphe Γ de droite.

le module	est compilé APRÈS les modules
M_0	M_4, M_6, M_8
M_1	M_0, M_8
M_2	M_5
M_3	M_5
M_4	M_7
M_5	–
M_6	M_3
M_7	M_2, M_8
M_8	M_2

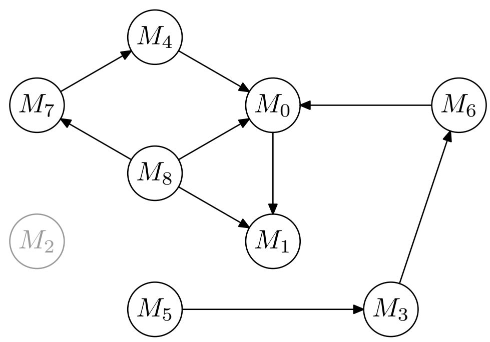


On aura besoin de travailler sur des sous-graphes G du graphe Γ. C'est pourquoi, pour toute la suite, on suppose fixé l'entier n (qu'on pourra supposer supérieur à 2), et les graphes considérés n'utiliseront que quelques-uns des n sommets M_0, M_1, …, M_{n-1}. Pour simplifier la rédaction, on pourra utiliser la notation suivante : si s est un sommet d'un graphe G, on note $[s]$ son numéro, de sorte que $s = M_{[s]}$.

On représente un graphe G dont les sommets sont pris parmi les n sommets listés ci-dessus par une liste G=[App,Succ,p] où App est une liste de n valeurs booléennes (c'est-à-dire True ou False) ; Succ est une liste de n listes ; p est un entier. Plus précisément :

— pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, App[i] est True si et seulement si le module M_i est présent dans le graphe ;
— p est le nombre de sommets du graphe considéré, donc le nombre d'occurrences de True dans la liste App ;
— pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, Succ[i] est la liste vide si M_i n'est pas présent dans le graphe, et sinon Succ[i] est la liste (éventuellement vide) des numéros j des sommets M_j tels qu'il y a un arc de M_i vers M_j.

Par exemple, le graphe G de la figure suivante (obtenu en supprimant dans Γ le sommet M_2) :



est représenté par la liste G=[App,Succ,p] où

— App = [True,True,False,True,True,True,True,True,True] ;
— Succ = [[1], [], [], [6], [0], [3], [0], [4], [0, 1, 7]] ;
— p=8.

Dans toute la suite, on suppose que la valeur n, qui est fixée, est stockée dans une variable globale n. Les variables i et j désignent des numéros de sommets, donc des entiers de l'intervalle $[\![0, n-1]\!]$.

Question 10.

Écrire une fonction mem(i,G) qui prend en argument un entier i et la représentation G d'un graphe (telle qu'elle est décrite ci-dessus) et renvoie le booléen indiquant si le sommet de numéro i est dans le graphe.

Question 11.

Écrire une fonction pred(i,G) qui renvoie la liste, éventuellement vide, des numéros j des sommets du graphe représenté par G tels que l'arc qui va de M_j à M_i soit présent dans le graphe.

Par exemple, pour le graphe de la figure ci-dessus, pred(0,G) renvoie la liste [4, 6, 8].

Question 12.

Écrire une fonction sansSuccesseur(G) qui renvoie le numéro i d'un sommet M_i du graphe qui n'a pas de successeur, s'il en existe, ou qui renvoie -1 s'il n'y a pas de tel sommet. Dans l'exemple du graphe ci-dessus, sansSuccesseur(G) renvoie 1.

Question 13.

Compléter la fonction suivante suppr(i,G) qui renvoie **un nouveau graphe** H obtenu à partir de G en supprimant le sommet de numéro i et toutes les flèches qui lui sont reliées.

```
def suppr(i,G):
    H = copy.deepcopy(G)
    H[2] = H[2] - 1
     ...
      .
      .
      .
     ...
     return H
```

L'appel H = copy.deepcopy(G) permet d'instancier la variable H avec une copie de G.

Étant donné un graphe de dépendances G possédant p sommets (avec $p \leqslant n$), un ordre topologique sur le graphe est la donnée d'une renumérotation des sommets du graphe qui respecte les arcs du graphe, c'est-à-dire une fonction N bijective, définie sur l'ensemble des numéros des sommets présents dans le graphe G, à valeurs dans $[\![0, p-1]\!]$ telle que s'il existe un arc du sommet M_i vers le sommet M_j on a $N(i) < N(j)$.

Par exemple, pour le graphe de la dernière figure ci-dessus, il existe un ordre topologique, défini par $N(0) = 6$, $N(1) = 7$, $N(3) = 1$, $N(4) = 5$, $N(5) = 0$, $N(6) = 2$, $N(7) = 4$ et $N(8) = 3$.

Un chemin dans un graphe est une suite d'au moins deux sommets reliés par des arcs consécutifs. Un cycle est un chemin qui retourne au sommet de départ.

Question 14.

Dans cette question, on considère un graphe orienté G possédant p sommets (avec $p \leqslant n$) qui sont pris parmi M_0, M_1, ..., M_{n-1}. On suppose que chaque sommet admet au moins un successeur.

14.a On effectue une promenade dans le graphe : on choisit un sommet s_0, puis un successeur s_1 de s_0, puis un successeur s_2 de s_1, etc. On peut ainsi obtenir une suite s_0, s_1, ..., s_n. Montrer qu'il existe deux indices i et j tels que $0 \leqslant i < j \leqslant n$ et $s_i = s_j$.

14.b Justifier qu'il existe au moins un cycle dans ce graphe.

14.c Montrer qu'il est impossible de trouver un ordre topologique sur ce graphe.

Question 15.

Soit G un graphe ayant p sommets (avec $p \leqslant n$) parmi M_0, ..., M_{n-1}. On suppose que G admet au moins un sommet s sans successeur. On appelle H le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet s et tous les arcs reliés à s. Montrer que si H possède un ordre topologique N_H à valeurs dans $[\![0, p-2]\!]$, on peut l'étendre à un ordre topologique N sur G en posant $N([s]) = p - 1$ et $N([s']) = N_H([s'])$ pour tous les sommets s' de H.

Question 16.

On peut déduire de cette étude un algorithme de détermination d'un ordre topologique N sur un graphe G, quand il en existe. Un tel ordre topologique est représenté par une liste `L` à n éléments : si le sommet M_i n'est pas dans le graphe G, on a `L[i] = -1` ; si M_i est dans G, `L[i]` contient la valeur $N(i)$.

16.a Recopier et compléter la fonction suivante pour répondre à la question : `ordreTopologique(G)` renvoie `None` s'il n'existe pas d'ordre topologique sur le graphe `G` et une liste `L` qui représente un ordre topologique s'il en existe un. La fonction `parcoursReussi` peut procéder à des appels récursifs.

```
def ordreTopologique(G):
  n = len(G[0])
    L = [-1] * n

    def parcoursReussi(G):
        p = G[2]
        if p != 0:
            s = sansSuccesseur(G)
            if s == -1:
                return ...
            else:
                ...
                ...
                return ...
        else:
            return ...


    b = parcoursReussi(G)
    if b:
        return L
    else:
        return None
```

16.b Prouver que l'algorithme termine toujours.

Partie B – allocation de registres

Quand le code est en phase finale de compilation, on peut supposer, pour simplifier, qu'il se présente comme une succession d'affectations de variables ou d'utilisation de ces variables à l'aide de fonctions simples (opérations arithmétiques ou logiques). L'accès à la mémoire étant plus coûteux en temps que le calcul lui-même, il est préférable de conserver le plus possible de résultats intermédiaires dans les registres du processeur plutôt que dans la mémoire vive. Mais le processeur n'a qu'un nombre limité de registres : il s'agit donc de savoir si tous les calculs peuvent être menés en se confinant à cet espace limité.

On se limite ici à un modèle extrêmement simplifié, où le code du programme ne comporte que des affectations de variables `x = ...` ou des appels de fonctions `f(a,b ,...)` , comme le code Python suivant :

```
0 d = 1
1 b = 2 * d
2 a = 3
3 d = a * b
4 print(d)
5 c = 2 * a - b
6 print(a)
7 d = c + b
8 b = 2 * a
9 print(c,d)
```

Comme un programme ne peut utiliser qu'un nombre fini de variables, on suppose dans toute la suite qu'on dispose d'une numérotation des variables, ce qui permet de représenter une variable par un entier naturel. Dans l'exemple ci-dessus, on supposera que `a` est numérotée 0, `b` est numérotée 1, etc.

Une affectation de variable est représentée par un couple `(i, [j,k ,...])` constitué du numéro de la variable qui figure à gauche du symbole = et de la liste des numéros des variables qui figurent à droite. Par exemple, l'affectation `c = 2 * a -b` est représentée par le couple `(2, [0,1])`.

Un appel de fonction est représenté par un couple `(None, [j,k ,...])` dont le deuxième élément est la liste des numéros des variables utilisées dans l'appel de fonction. Par exemple, l'appel `print(c,d)` est représenté par le couple `(None, [2,3])`.

Les constantes apparaissant dans les différentes instructions ne sont pas prises en compte dans cette représentation.

Le programme précédent est ainsi représenté par la liste de couples suivante :

```
prog = [(3,[]), (1,[3]), (0,[]), (3,[0,1]), (None,[3]), (2,[0,1]), (None,[0]), (3,[1,2]), (1,[0]), (None,[2,3])]
```

On cherche à savoir à quels moments il est utile de conserver dans les registres du processeur les valeurs des différentes variables.

Dans l'exemple du programme ci-dessus, si on s'intéresse à la variable `d`, on observe que :
- elle est initialisée en ligne 0, et cette valeur est utilisée en ligne 1 ;
- elle est modifiée en ligne 3, et la nouvelle valeur est utilisée en ligne 4 ;
- elle est modifiée en ligne 7, et la nouvelle valeur est utilisée en ligne 9.

La variable `d` a donc trois périodes de vie, qu'on peut représenter par les intervalles $]0,1]$, $]3,4]$ et $]7,9]$.

La variable `a` a une seule période de vie : l'intervalle $]2,8]$; la variable `b` n'a également qu'une période de vie : l'intervalle $]1,7]$. En effet, `b` est modifiée en ligne 8 mais sa valeur n'est pas utilisée dans la suite, donc on ne tient pas compte de l'intervalle $]8,9]$.

On dit qu'une variable est vivante pour chaque instruction d'une période de vie, et morte pour les autres.

L'algorithme suivant permet de déterminer pour chaque ligne de code si chaque variable est morte ou vivante.

- on commence par indiquer que chaque variable est morte ;
- pour chaque ligne de code, **en partant du bas** :
  - s'il s'agit d'un appel de fonction, chaque variable utilisée est marquée vivante ;
  - s'il s'agit d'une affectation, la variable affectée est marquée morte sauf si elle figure également à droite du symbole =, et toutes les variables à droite du symbole = sont marquées vivantes.

Question 17.

Recopier et compléter les lignes 0 à 4 du tableau suivant qui indique l'état de chaque variable pour chaque instruction du programme ci-dessus. (Un V indique une variable vivante, un M une variable morte.)

ligne	a	b	c	d
0				
1				
2				
3				
4				
5	V	V	M	M
6	V	V	V	M
7	V	V	V	M
8	V	M	V	V
9	M	M	V	V

Question 18. Comment interpréter le cas où en ligne 0 du tableau on trouve une variable vivante ? Le programme est-il exécutable ?

Question 19.

Pour un programme comportant n instructions et utilisant p variables numérotées de 0 à $p-1$, le tableau qui indique l'état de chaque variable pour chaque instruction peut être représenté par une liste de listes `vie` telle que pour la ligne i (avec $0 \leqslant i < n$) et la variable v (avec $0 \leqslant v < p$), `vie[i][v]` est `True` si la variable est vivante et `False` si la variable est morte.

Écrire une fonction `determineVie(prog,p)` qui prend en argument un programme et le nombre p de variables à considérer et qui renvoie le tableau `vie` correspondant.

Question 20.

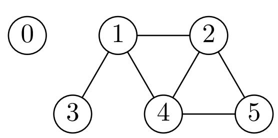
Recopier et compléter la fonction suivante `periodesVie(vie,v)` qui prend en arguments la table `vie` obtenue par la fonction `determineVie` et le numéro d'une variable et qui renvoie la liste des périodes de vie de cette variable. Ainsi, pour l'exemple du programme considéré, et la variable `d`, la fonction `periodesVie` renvoie la liste `[(7, 9), (3, 4), (0, 1)]` (l'ordre n'a pas d'importance).

```
def periodesVie(vie,v):
    n = len(vie)
    periodes = []
    i = n-1
    encours = False
    while i>=0:
        if vie[i][v]:
            if not encours:
                ...
                ...
        else:
            if ...:
                ...
                ...
        i -= 1
    return periodes
```

Partie C – graphe de coexistence

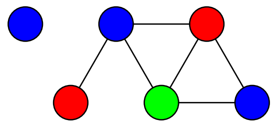
Des techniques analogues à celle présentée dans la partie B permettent de construire un graphe de coexistence des variables occupant des registres. Il s'agit d'un graphe non orienté tel que deux sommets reliés dans ce graphe correspondent à deux variables vivantes au même moment, ce qui oblige à les ranger dans des registres différents.

La figure ci-dessous montre un exemple de graphe de coexistence : les variables numérotées 1, 2, 4 doivent être rangées dans trois registres distincts. Mais les variables numérotées 1 et 5 peuvent être rangées dans le même registre, puisque les sommets correspondants ne sont pas reliés.



Pour déterminer le nombre de registres nécessaire, il suffit de colorier le graphe de sorte que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes, en utilisant le moins de couleurs possible. Ce nombre minimal de couleur est le nombre cherché de registres.

Dans l'exemple du graphe ci-dessus, trois couleurs suffisent.



Question 21.

Le problème général de la détermination du nombre minimal de couleurs nécessaire à la coloration d'un graphe est connu pour être un problème NP-complet. Que signifie l'expression « ce problème est dans la classe NP » ? et que signifie l'adjonction de l'adjectif « complet » ?

Dans la suite, un graphe non orienté possédant n sommets numérotés de 0 à $n-1$ est représenté par une liste G de n listes : G[i] est la liste (éventuellement vide) des sommets reliés au sommet i. Autrement dit, G[i] est la liste des voisins du sommet i.

L'exemple du graphe précédent est représenté par la liste G=[[], [2,3,4], [1,4,5], [1], [1,2,5], [2,4]].

Une coloration du graphe est représentée par une liste donnant le numéro de la couleur de chaque sommet. Dans l'exemple ci-dessus, si bleu est numéro 0, rouge numéro 1 et vert numéro 2, la coloration proposée est représentée par la liste couleur = [0,0,1,1,2,0] .

Question 22.

Écrire une fonction bonnesCouleurs(G,couleur) qui prend en argument un graphe G et une coloration couleur de ses sommets et qui renvoie True si et seulement si la coloration est correcte, c'est-à-dire que deux sommets adjacents n'ont jamais la même couleur.

Question 23.

Il est facile d'écrire un algorithme qui permet de déterminer une coloration correcte d'un graphe, mais sans garantir qu'on utilise le nombre minimal de couleurs.

Par exemple, en partant d'un graphe dont aucun sommet n'est colorié.

1. choisir la première couleur disponible ;
2. tant qu'il existe un sommet non colorié répéter les étapes 3 à 6 ;
3. choisir un sommet s non colorié, et le colorier avec la couleur courante ;
4. répéter l'étape 5 pour tout sommet t non colorié ;
5. si t n'est adjacent à aucun sommet colorié avec la couleur courante, le colorier avec la couleur courante ;
6. choisir une nouvelle couleur ;
7. fin de l'algorithme.

Écrire une fonction coloriage (G) qui prend en argument un graphe et renvoie à l'aide de l'algorithme ci-dessus une coloration possible de ses sommets. On pourra utiliser (sans la recopier) la fonction auxiliaire suivante qui vérifie qu'aucun sommet de la liste voisins n'est de la couleur c.

```
def coloriable(voisins,couleur,c):
    for v in voisins:
        if couleur[v] == c: return False
    return True
```

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

On rappelle que tous les programmes demandés doivent être rédigés dans le langage Python.

Problème 1 : base 3 équilibrée

Notation. $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.

En informatique, on utilise traditionnellement la base 2 pour représenter les entiers. Ce choix est dicté par la technologie utilisée par les ordinateurs actuels. Dans les années 60, d'autres technologies avaient été envisagées, dont l'utilisation d'une base de numération appelée base 3 équilibrée.

En base 3 classique, on écrit les nombres à l'aide de trois chiffres : 0, 1 et 2 : par exemple, $23 = \overline{212}^3 = 2 \times 3^2 + 1 \times 3 + 2$, $46 = \overline{1201}^3 = 1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 0 \times 3 + 1$.

En base 3 équilibrée, les « chiffres » utilisés sont 0, 1 et -1 :

$23 = \overline{10(-1)(-1)}^e = 1 \times 3^3 + 0 \times 3^2 - 1 \times 3 - 1$, $46 = \overline{1(-1)(-1)01}^e = 1 \times 3^4 - 1 \times 3^3 - 1 \times 3^2 + 0 \times 3 + 1$.

Dans toute la suite, on s'intéresse à l'écriture en base 3 équilibrée des entiers naturels **non nuls**. On note $C = \{-1, 0, 1\}$ l'ensemble des chiffres utilisés dans l'écriture en base 3 équilibrée.

L'écriture en base 3 équilibrée d'un entier naturel **non nul** sera notée comme ci-dessus, par la suite des chiffres surmontée d'un trait avec un exposant e. Si a_0, a_1, ..., a_{p-1} sont dans C, on a donc :

$$\overline{a_0 a_1 \ldots a_{p-1}}^e = \sum_{k=0}^{p-1} a_k 3^{p-1-k}.$$

L'écriture en base 3 équilibrée d'un entier naturel non nul, lue de gauche à droite, commence toujours par le chiffre 1.

Partie I – généralités

Question 1.

1.a Donner la valeur de $\overline{1(-1)0(-1)}^e$, de $\overline{1111}^e$ et de $\overline{1(-1)(-1)(-1)(-1)}^e$.

$\overline{1(-1)0(-1)}^e = 27 - 9 - 1 = 17$, $\overline{1111}^e = 27 + 9 + 3 + 1 = 40$ et $\overline{1(-1)(-1)(-1)(-1)}^e = 81 - 27 - 9 - 3 - 1 = 41$.

1.b Écrire en base 3 équilibrée les entiers de 1 à 9.

$1 = \overline{1}^e$, $2 = \overline{1(-1)}^e$, $3 = \overline{10}^e$, $4 = \overline{11}^e$, $5 = \overline{1(-1)(-1)}^e$, $6 = \overline{1(-1)0}^e$, $7 = \overline{1(-1)1}^e$, $8 = \overline{10(-1)}^e$, $9 = \overline{100}^e$.

Question 2. Soit k un entier naturel.

Déterminer la valeur de $A_k = \overline{1\,\underbrace{11\ldots1}_{k \text{ chiffres}}}^e$ et de $B_k = \overline{1\,\underbrace{(-1)(-1)\ldots(-1)}_{k \text{ chiffres}}}^e$.

(On aura bien noté que ces deux écritures possèdent $k+1$ chiffres au total.)

$$A_k = \sum_{j=0}^{k} 3^j = \frac{3^{k+1} - 1}{2} \text{ et } B_k = 3^k - A_{k-1} = 3^k - \frac{3^k - 1}{2} = \frac{3^k + 1}{2}.$$

Question 3. On représente l'écriture en base 3 équilibrée $\overline{a_0 \ldots a_{p-1}}^e$ par la liste Python $[a_{p-1}, a_{p-2}, \ldots, a_0]$ (attention, les chiffres sont écrits dans la liste en lisant de droite à gauche l'écriture en base 3 équilibrée, le dernier d'entre eux est donc toujours le chiffre 1).

Écrire une fonction `valeur(L)` qui prend en argument une liste de chiffres et renvoie l'entier naturel non nul dont c'est une écriture en base 3 équilibrée.

Par exemple `valeur([1,0,−1,−1,1])` renvoie l'entier 46.

```python
def valeur(L):
    s = 0
    a = 1
    for k in range(len(L)):
        if L[k] == 1: s = s + a
        elif L[k] == -1: s = s - a
        a = 3*a
    return s
```

Partie II – existence et unicité de l'écriture en base 3 équilibrée

Question 4. On veut montrer que tout entier naturel non nul n admet une écriture en base 3 équilibrée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note q et r le quotient et le reste dans la division euclidienne de n par 3 : $n = 3q + r$ et $r \in \{0, 1, 2\}$.

4.a On suppose que q est non nul et admet une écriture en base 3 équilibrée $q = \overline{a_0 \dots a_{p-1}}^e$. Déterminer une écriture en base 3 équilibrée de n dans le cas où $r = 0$ ou $r = 1$.

$n = 3q + r = 3\overline{a_0 \dots a_{p-1}}^e + r = \overline{a_0 \dots a_{p-1}0}^e + r = \overline{a_0 \dots a_{p-1}r}^e$.

4.b On suppose que q est non nul et que $q + 1$ admet une écriture en base 3 équilibrée $q + 1 = \overline{b_0 \dots b_{p-1}}^e$. Déterminer une écriture en base 3 équilibrée de n dans le cas où $r = 2$.

$n = 3q + 2 = 3(q + 1) - 1 = 3\overline{b_0 \dots b_{p-1}}^e - 1 = \overline{b_0 \dots b_{p-1}0}^e - 1 = \overline{b_0 \dots b_{p-1}(-1)}^e$.

4.c Montrer par récurrence que tout entier naturel non nul admet une écriture en base 3 équilibrée.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : tout entier naturel au plus égal à n admet une écriture en base 3 équilibrée. La question 1.b montre que $\mathscr{P}_9$ est vraie.

Soit $n \geqslant 10$. On suppose $\mathscr{P}_{n-1}$ vraie, on veut montrer $\mathscr{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que n admet également une écriture en base 3 équilibrée. On effectue la division euclidienne par 3, comme suggéré par l'énoncé : $n = 3q + r$ avec $r \in \{0, 1, 2\}$.

On a alors $q < q + 1 = \dfrac{n-r}{3} + 1 \leqslant \dfrac{n}{3} + 1 \leqslant n - 1$ puisque $(n-1) - \left(\dfrac{n}{3} + 1\right) = \dfrac{2n}{3} - 2 \geqslant \dfrac{20}{3} - 2 \geqslant 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, q et $q + 1$ admettent une écriture en base 3 équilibrée, et les questions 4.a et 4.b montrent qu'il en est de même pour n.

La récurrence s'enclenche.

Question 5. On souhaite écrire en Python une fonction incremente(L) qui prend en argument une liste L de chiffres représentant une écriture en base 3 équilibrée d'un entier naturel non nul n et qui renvoie une liste représentant une écriture en base 3 équilibrée de $n + 1$.

5.a On propose la fonction récursive incrementeR(L) suivante.

Expliquer la ligne 9. Pourquoi a-t-il fallu écrire les lignes 1 et 2 ?

```python
0 def incrementeR(L):
1     if len(L)==0:
2         return [1]
3     elif L[0]==0:
4         return [1]+L[1:]
5     elif L[0]==-1:
6         return [0]+L[1:]
7     else:
8         # ici L[0]==1
9         return [-1]+incrementeR(L[1:])
```

On est dans le cas où $n = 1 + 3q$ où q admet une écriture en base 3 équilibrée représentée par la liste L[1:]. Alors $n + 1 = 2 + 3q = -1 + 3(q + 1)$: le chiffre de poids faible est -1 et la suite de l'écriture est celle de $q + 1$.

Dans le cas où L est [1,1,...,1] le dernier appel récursif se fera avec une liste vide en argument : c'est cela qui impose d'écrire les lignes 1 et 2.

5.b On souhaite écrire une version non récursive incremente(L) de cette fonction.

Recopier et compléter le script suivant pour répondre à cette question :

```python
def incremente(L):
    p = len(L)
    M = [] # liste finale
    k = 0
    while k < p and L[k] == 1:
        M.append(-1)
        k += 1
    if k == p:
        M.append (...)
    elif L[k] == 0:
        M.append (...)
        M = M + L[k+1:]
    elif L[k] == -1:
        ...
        ...
    return M
```

```python
def incremente(L):
    p = len(L)
    M = [] # liste finale
    k = 0
    while k < p and L[k] == 1:
        M.append(-1)
        k += 1
    if k == p:
        M.append(1)
    elif L[k] == 0:
        M.append(1)
        M = M + L[k+1:]
    elif L[k] == -1:
        M.append(0)
        M = M + L[k+1:]
    return M
```

Question 6. On souhaite montrer que l'écriture en base 3 équilibrée d'un entier naturel n non nul est unique.

6.a Soit a_0, ..., a_{p-1} des chiffres de C (avec $a_0 = 1$ et $p \geqslant 1$). Quel est le reste dans la division euclidienne par 3 du nombre $\overline{a_0 a_1 \dots a_{p-1}}^e$?

$\overline{a_0 \dots a_{p-1}}^e = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a_k 3^{p-1-k} = a_{p-1} + 3\sum_{k=0}^{p-2} a_k 3^{p-2-k} \equiv a_{p-1}[3]$. Donc le reste dans la division euclidienne cherché est égal à a_{p-1} si $a_{p-1} \in \{0, 1\}$ et à 2 si $a_{p-1} = -1$.

6.b En déduire que l'écriture en base 3 équilibrée d'un entier naturel n non nul est unique.

On raisonne par récurrence sur n.

D'après la question 2, pour $k \geqslant 1$, $B_k \geqslant \dfrac{3+1}{2} = 2$ donc toute écriture comportant au moins 2 chiffres est celle d'un nombre au moins égal à 2. Ainsi $n = 1$ n'a qu'une unique écriture : $1 = \overline{1}^e$.

Soit $n \geqslant 1$. On suppose qu'on a prouvé que tout entier non nul au plus égal à n admet une unique écriture en base 3 équilibrée, et on veut montrer qu'il en est de même de $n+1$.

La question 6.a montre qu'une écriture en base 3 équilibrée de $n+1$ se termine nécessairement par le chiffre $a_p = 0$, 1 ou -1 selon le reste dans la division de $n+1$ par 3. Mais alors les chiffres précédents sont ceux d'une écriture d'un entier $n' = \dfrac{n+1-a_p}{3} \leqslant \dfrac{n+2}{3} \leqslant n$: il y a unicité par hypothèse de récurrence.

La récurrence s'enclenche donc bien.

Question 7. Écrire une fonction base3e(n) qui prend en argument un entier naturel n non nul et renvoie la liste L de chiffres qui correspond à l'écriture en base 3 équilibrée de n. Par exemple base3e(46) renvoie [1,0,−1,−1,1]).

On propose la fonction suivante.

```
def base3e(n):
    M = [] # liste finale
    while n>0:
        r = n % 3 # reste dans la division par 3
        if r<2:
            M.append(r)
            n = n // 3
        else:       # cas r=2
            M.append(-1)
            n = (n+1) // 3
    return M
```

Partie III – chemins de Delannoy

On considère le plan euclidien P rapporté à un repère orthonormé.

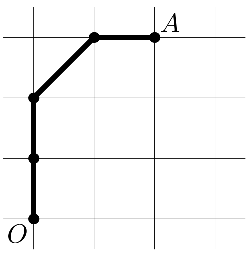
Un chemin de Delannoy du plan P est un arc suivant une ligne brisée partant de l'origine O et arrivant en un point A de coordonnées (a, b) où a et b sont deux entiers naturels, constituée d'arcs à choisir parmi trois types : un arc horizontal (associé au vecteur $(1, 0)$), un arc vertical (associé au vecteur $(0, 1)$) ou un arc diagonal (associé au vecteur $(1, 1)$). Dans le parcours d'un chemin de Delannoy, on va donc toujours vers la droite, vers le haut, ou en diagonale vers la droite et vers le haut en même temps.

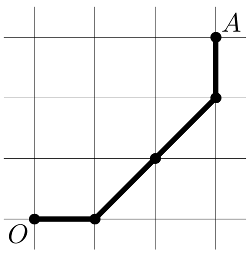
On associe à tout chemin de Delannoy un entier naturel non nul n défini par son écriture en base 3 équilibrée de la façon suivante : le premier chiffre de cette écriture est toujours égal à 1 (comme pour toute écriture en base 3 équilibrée), les chiffres suivants caractérisent les arcs consécutifs du chemin, le chiffre 1 est associé à un segment horizontal, le chiffre -1 à un arc vertical, et le chiffre 0 à un arc diagonal. Inversement à tout entier naturel non nul on peut associer le chemin de Delannoy qui est associé à son écriture en base 3 équilibrée.

On fera attention que le premier chiffre de l'écriture en base 3 équilibrée, toujours égal à 1, n'est pas pris en compte dans la construction du chemin.

Remarque : $n = 1 = \overline{1}^e$ est l'entier associé à un chemin de Delannoy de longueur nulle.

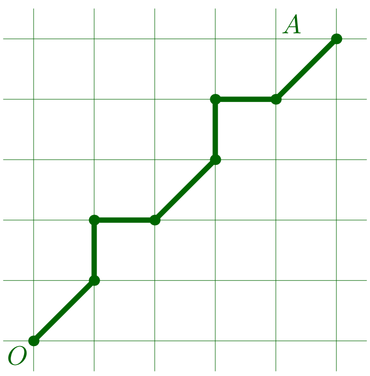
Par exemple, les entiers associés aux deux chemins de Delannoy ci-dessous sont respectivement $46 = \overline{1(-1)(-1)01}^e$ pour la figure de gauche et $107 = \overline{1100(-1)}^e$ pour la figure de droite.





Question 8.

8.a Dessiner le chemin de Delannoy associé à l'entier 2019.



8.b On note (a, b) les coordonnées entières du point d'arrivée d'un chemin de Delannoy. Écrire la fonction arrivee(n) qui renvoie ce couple de coordonnées quand on lui donne en argument l'entier non nul n associé au chemin de Delannoy. Par exemple arrivee(46) renvoie le couple (2, 3) et arrivee(107) renvoie le couple (3, 3).

On pourra s'inspirer de la fonction base3e.

```
def arrivee(n):
    (a,b) = (0,0)
    while n>1:  # on ne tient pas compte du premier chiffre (toujours 1)
        r = n % 3
        if r == 0:
            (a,b) = (a+1,b+1)
            n = n // 3
        elif r == 1:
            (a,b) = (a+1,b)
            n = n // 3
        else:  # cas r=2
            (a,b) = (a,b+1)
            n = (n+1) // 3
    return (a,b)
```

Question 9.

Soit a et b deux entiers naturels, et A le point de coordonnées (a, b). Il existe plusieurs chemins de Delannoy allant de l'origine au point A, chacun d'eux étant associé à un entier naturel. Soit $N(a, b)$ l'ensemble de ces entiers.

9.a Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\min N(a, a)$ et $\max N(a, a)$.

On a vu à la question 2 que les entiers dont l'écriture en base 3 équilibrée comporte exactement k chiffres après le 1 initial sont compris au sens large entre $B_k = \dfrac{3^k + 1}{2}$ et $A_k = \dfrac{3^{k+1} - 1}{2}$. Comme $B_{k+1} = A_k + 1$, on peut en déduire que l'ensemble des entiers dont l'écriture en base 3 équilibrée comporte exactement k chiffres après le 1 initial sont exactement les entiers de l'intervalle $\left[\!\left[\dfrac{3^k + 1}{2}, \dfrac{3^{k+1} - 1}{2}\right]\!\right]$. (On peut aussi observer qu'avec k chiffres après le 1 initial, on obtient 3^k nombres différents, grâce à l'unicité de l'écriture, et que justement $A_k - B_k + 1 = 3^k$.)

Soit $A(a, a)$. Il existe un unique chemin de O à A composé de a arcs : tous ses arcs sont du type diagonal. Il correspond à l'entier $n = 1\underbrace{0\ldots0}_{a \text{ zéros}} = 3^a$. Tout autre chemin de O à A comporte au moins $a + 1$ arcs et correspond donc à un entier supérieur. Ainsi $\min N(a, a) = 3^a$.

On vérifie facilement que quels que soient les chiffres représentés par $*$:

$$\overline{1\ \underbrace{*\ldots*}_{p \text{ chiffres}}}^{e} \geqslant 3^p > \overline{0\ \underbrace{*\ldots*}_{p \text{ chiffres}}}^{e} \geqslant \overline{0\,\underbrace{-1\ldots-1}_{p \text{ chiffres}}}^{e} = \frac{-3^p + 1}{2} > \overline{-1\ \underbrace{*\ldots*}_{p \text{ chiffres}}}^{e}.$$

Ainsi $\max N(a, a)$ sera obtenu en maximisant le nombre de chiffres 1 en début d'écriture en base 3 équilibrée : on obtient donc

$$\max N(a, a) = \overline{1\,\underbrace{11\ldots1}_{a \text{ chiffres}}\,\underbrace{-1-1\ldots-1}_{a \text{ chiffres}}}^{e} = 3^{2a} + \frac{(3^a - 1)^2}{2}.$$

9.b On suppose que les entiers a et b vérifient $0 < a < b$. Déterminer $\min N(a, b)$ et $\max N(a, b)$.

Un raisonnement analogue conduit à

$$\min N(a, b) = \overline{1\,\underbrace{-1-1\ldots-1}_{(b-a) \text{ chiffres}}\,\underbrace{00\ldots0}_{a \text{ chiffres}}}^{e} = \frac{3^a + 3^b}{2},$$

$$\max N(a, b) = \overline{1\ \underbrace{11\ldots1}_{(a \text{ chiffres}}\ \underbrace{-1-1\ldots-1}_{b \text{ chiffres}}}^{e} = \frac{3^{a+b+1} - 2\,.\,3^b + 1}{2}.$$

Problème 2 : compilation et algorithmes

Notation. Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.

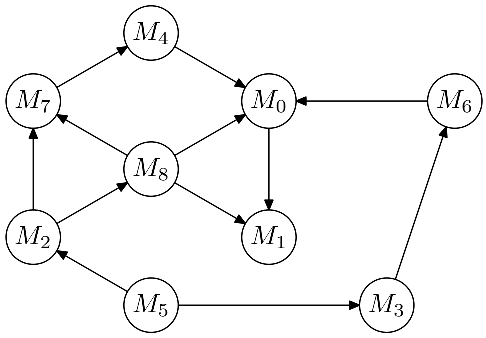
Partie A – ordre topologique sur un graphe

Lors de l'écriture d'un programme complexe, on le découpe souvent en modules distincts, mais dépendants les uns des autres. Le compilateur a besoin de connaître l'ordre dans lequel compiler ces modules. Pour ce faire, on utilise un graphe de dépendances, que nous décrivons brièvement ici.

On suppose qu'on dispose de n modules numérotés M_0, M_1, ..., M_{n-1} et on représente leurs relations de dépendance à l'aide d'un graphe Γ dont les sommets sont les modules, et dont une arête allant du module M_i au module M_j indique que le module M_i doit être compilé avant le module M_j.

Par exemple, avec $n = 9$, aux contraintes du tableau de gauche ci-dessous, on peut associer le graphe Γ de droite.

le module	est compilé APRÈS les modules
M_0	M_4, M_6, M_8
M_1	M_0, M_8
M_2	M_5
M_3	M_5
M_4	M_7
M_5	–
M_6	M_3
M_7	M_2, M_8
M_8	M_2

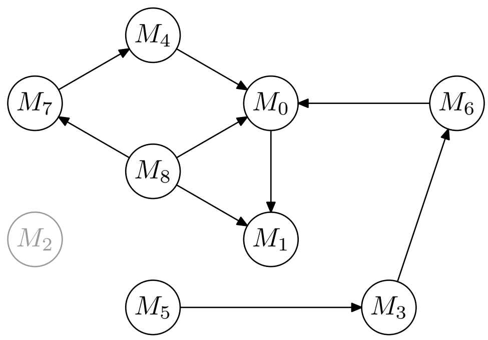


On aura besoin de travailler sur des sous-graphes G du graphe Γ. C'est pourquoi, pour toute la suite, on suppose fixé l'entier n (qu'on pourra supposer supérieur à 2), et les graphes considérés n'utiliseront que quelques-uns des n sommets M_0, M_1, ..., M_{n-1}. Pour simplifier la rédaction, on pourra utiliser la notation suivante : si s est un sommet d'un graphe G, on note $[s]$ son numéro, de sorte que $s = M_{[s]}$.

On représente un graphe G dont les sommets sont pris parmi les n sommets listés ci-dessus par une liste G=[App,Succ,p] où App est une liste de n valeurs booléennes (c'est-à-dire True ou False) ; Succ est une liste de n listes ; p est un entier. Plus précisément :

- pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, App[i] est True si et seulement si le module M_i est présent dans le graphe ;
- p est le nombre de sommets du graphe considéré, donc le nombre d'occurrences de True dans la liste App ;
- pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, Succ[i] est la liste vide si M_i n'est pas présent dans le graphe, et sinon Succ[i] est la liste (éventuellement vide) des numéros j des sommets M_j tels qu'il y a un arc de M_i vers M_j.

Par exemple, le graphe G de la figure suivante (obtenu en supprimant dans Γ le sommet M_2) :



est représenté par la liste G=[App,Succ,p] où

- App = [True,True,False,True,True,True,True,True,True] ;
- Succ = [[1], [], [], [6], [0], [3], [0], [4], [0, 1, 7]] ;
- p=8.

Dans toute la suite, on suppose que la valeur n, qui est fixée, est stockée dans une variable globale n. Les variables i et j désignent des numéros de sommets, donc des entiers de l'intervalle $[\![0, n-1]\!]$.

Question 10.

Écrire une fonction mem(i,G) qui prend en argument un entier i et la représentation G d'un graphe (telle qu'elle est décrite ci-dessus) et renvoie le booléen indiquant si le sommet de numéro i est dans le graphe.

```
def mem(i,G):
  return G[0][i]
```

Question 11.

Écrire une fonction pred(i,G) qui renvoie la liste, éventuellement vide, des numéros j des sommets du graphe représenté par G tels que l'arc qui va de M_j à M_i soit présent dans le graphe.

Par exemple, pour le graphe de la figure ci-dessus, pred(0,G) renvoie la liste [4, 6, 8].

```
def pred(i,G):
  predecesseurs = []
  for j in range(n):
    if i in G[1][j]:
      predecesseurs.append(j)
  return predecesseurs
```

Question 12.

Écrire une fonction sansSuccesseur(G) qui renvoie le numéro i d'un sommet M_i du graphe qui n'a pas de successeur, s'il en existe, ou qui renvoie -1 s'il n'y a pas de tel sommet. Dans l'exemple du graphe ci-dessus, sansSuccesseur(G) renvoie 1.

```
def sansSuccesseur(G):
    i = 0
    while i < n and (len(G[1][i]) > 0 or not G[0][i]):
        i += 1
    if i < n:
        return i
    else:
        return -1
```

Question 13.

Compléter la fonction suivante suppr(i,G) qui renvoie **un nouveau graphe** H obtenu à partir de G en supprimant le sommet de numéro i et toutes les flèches qui lui sont reliées.

```
def suppr(i,G):
    H = copy.deepcopy(G)
    H[2] = H[2] - 1
    ...
     .
     .
     .
    ...
    return H
```

L'appel H = copy.deepcopy(G) permet d'instancier la variable H avec une copie de G.

```
def suppr(i,G):
    H = copy.deepcopy(G)
    H[2] = H[2] - 1
    H[0][i] = False
    H[1][i] = []
    for j in range(n):
        if i in H[1][j]: H[1][j].remove(i)
    return H
```

Étant donné un graphe de dépendances G possédant p sommets (avec $p \leqslant n$), un ordre topologique sur le graphe est la donnée d'une renumérotation des sommets du graphe qui respecte les arcs du graphe, c'est-à-dire une fonction N bijective, définie sur l'ensemble des numéros des sommets présents dans le graphe G, à valeurs dans $[\![0, p-1]\!]$ telle que s'il existe un arc du sommet M_i vers le sommet M_j on a $N(i) < N(j)$.

Par exemple, pour le graphe de la dernière figure ci-dessus, il existe un ordre topologique, défini par $N(0) = 6$, $N(1) = 7$, $N(3) = 1$, $N(4) = 5$, $N(5) = 0$, $N(6) = 2$, $N(7) = 4$ et $N(8) = 3$.

Un chemin dans un graphe est une suite d'au moins deux sommets reliés par des arcs consécutifs. Un cycle est un chemin qui retourne au sommet de départ.

Question 14.

Dans cette question, on considère un graphe orienté G possédant p sommets (avec $p \leqslant n$) qui sont pris parmi M_0, M_1, ..., M_{n-1}. On suppose que chaque sommet admet au moins un successeur.

14.a On effectue une promenade dans le graphe : on choisit un sommet s_0, puis un successeur s_1 de s_0, puis un successeur s_2 de s_1, etc. On peut ainsi obtenir une suite s_0, s_1, ..., s_n. Montrer qu'il existe deux indices i et j tels que $0 \leqslant i < j \leqslant n$ et $s_i = s_j$.

Les s_i forment une famille de $n+1$ objets à choisir parmi les n sommets : au moins deux d'entre eux sont égaux.

14.b Justifier qu'il existe au moins un cycle dans ce graphe.

Avec les notations de l'énoncé, $(s_i, s_{i+1}, \dots, s_j = s_i)$ forme un cycle dans le graphe.

14.c Montrer qu'il est impossible de trouver un ordre topologique sur ce graphe.

S'il existait un ordre topologique N sur ce graphe, en notant $[s_i]$ le numéro du sommet s_i, on aurait

$$N([s_i]) < N([s_{i+1}]) < \cdots < N([s_{j-1}]) < N([s_j]) = N([s_i]),$$

ce qui est absurde.

Question 15.

Soit G un graphe ayant p sommets (avec $p \leqslant n$) parmi M_0, ..., M_{n-1}. On suppose que G admet au moins un sommet s sans successeur. On appelle H le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet s et tous les arcs reliés à s. Montrer que si H possède un ordre topologique N_H à valeurs dans $[\![0, p-2]\!]$, on peut l'étendre à un ordre topologique N sur G en posant $N([s]) = p - 1$ et $N([s']) = N_H([s'])$ pour tous les sommets s' de H.

Que dire ? c'est assez évident.

Question 16.

On peut déduire de cette étude un algorithme de détermination d'un ordre topologique N sur un graphe G, quand il en existe. Un tel ordre topologique est représenté par une liste L à n éléments : si le sommet M_i n'est pas dans le graphe G, on a `L[i]` $= -1$; si M_i est dans G, `L[i]` contient la valeur $N(i)$.

16.a Recopier et compléter la fonction suivante pour répondre à la question : `ordreTopologique(G)` renvoie `None` s'il n'existe pas d'ordre topologique sur le graphe `G` et une liste `L` qui représente un ordre topologique s'il en existe un. La fonction `parcoursReussi` peut procéder à des appels récursifs.

```python
def ordreTopologique(G):
    n = len(G[0])
    L = [-1] * n

    def parcoursReussi(G):
        p = G[2]
        if p != 0:
            s = sansSuccesseur(G)
            if s == -1:
                return ...
            else:
                ...
                ...
                return ...
        else:
```

```
            return ...


    b = parcoursReussi(G)
    if b:
        return L
    else:
        return None
```

```
def ordreTopologique(G):
    n = len(G[0])
    L = [-1] * n

    def parcoursReussi(G):
        p = G[2]
        if p != 0:
            s = sansSuccesseur(G)
            if s == -1:
                return False
            else:
                H = suppr(s,G)
                L[s] = p-1
                return parcoursReussi(H)
        else:
            return True


    b = parcoursReussi(G)
    if b:
        return L
    else:
        return None
```

16.b Prouver que l'algorithme termine toujours.

Pour prouver la terminaison, il suffit d'observer que la taille (p=G[2]) du graphe passé en argument à parcoursReussi décroît strictement à chaque appel récursif, et qu'il n'y a pas d'appel récursif quand elle descend à 0.

Partie B – allocation de registres

Quand le code est en phase finale de compilation, on peut supposer, pour simplifier, qu'il se présente comme une succession d'affectations de variables ou d'utilisation de ces variables à l'aide de fonctions simples (opérations arithmétiques ou logiques). L'accès à la mémoire étant plus coûteux en temps que le calcul lui-même, il est préférable de conserver le plus possible de résultats intermédiaires dans les registres du processeur plutôt que dans la mémoire vive. Mais le processeur n'a qu'un nombre limité de registres : il s'agit donc de savoir si tous les calculs peuvent être menés en se confinant à cet espace limité.

On se limite ici à un modèle extrêmement simplifié, où le code du programme ne comporte que des affectations de variables x = ... ou des appels de fonctions f(a,b ,...) , comme le code Python suivant :

```
d = 1
b = 2 * d
a = 3
d = a * b
print(d)
c = 2 * a - b
print(a)
d = c + b
b = 2 * a
print(c,d)
```

Comme un programme ne peut utiliser qu'un nombre fini de variables, on suppose dans toute la suite qu'on dispose d'une numérotation des variables, ce qui permet de représenter une variable par un entier naturel. Dans l'exemple ci-dessus, on supposera que a est numérotée 0, b est numérotée 1, etc.

Une affectation de variable est représentée par un couple (i, [j,k,...]) constitué du numéro de la variable qui figure à gauche du symbole = et de la liste des numéros des variables qui figurent à droite. Par exemple, l'affectation c = 2 * a -b est représentée par le couple (2, [0,1]).

Un appel de fonction est représenté par un couple (None, [j,k,...]) dont le deuxième élément est la liste des numéros des variables utilisées dans l'appel de fonction. Par exemple, l'appel **print**(c,d) est représenté par le couple (None, [2,3]).

Les constantes apparaissant dans les différentes instructions ne sont pas prises en compte dans cette représentation.

Le programme précédent est ainsi représenté par la liste de couples suivante :

```
prog = [(3,[]), (1,[3]), (0,[]), (3,[0,1]), (None,[3]), (2,[0,1]), (None,[0]), (3,[1,2]), (1,[0]), (None,[2,3])]
```

On cherche à savoir à quels moments il est utile de conserver dans les registres du processeur les valeurs des différentes variables.

Dans l'exemple du programme ci-dessus, si on s'intéresse à la variable d, on observe que :
- elle est initialisée en ligne 0, et cette valeur est utilisée en ligne 1 ;
- elle est modifiée en ligne 3, et la nouvelle valeur est utilisée en ligne 4 ;
- elle est modifiée en ligne 7, et la nouvelle valeur est utilisée en ligne 9.

La variable d a donc trois périodes de vie, qu'on peut représenter par les intervalles $]0,1]$, $]3,4]$ et $]7,9]$.

La variable a a une seule période de vie : l'intervalle $]2,8]$; la variable b n'a également qu'une période de vie : l'intervalle $]1,7]$. En effet, b est modifiée en ligne 8 mais sa valeur n'est pas utilisée dans la suite, donc on ne tient pas compte de l'intervalle $]8,9]$.

On dit qu'une variable est vivante pour chaque instruction d'une période de vie, et morte pour les autres.

L'algorithme suivant permet de déterminer pour chaque ligne de code si chaque variable est morte ou vivante.

- on commence par indiquer que chaque variable est morte ;
- pour chaque ligne de code, **en partant du bas** :
  - s'il s'agit d'un appel de fonction, chaque variable utilisée est marquée vivante ;
  - s'il s'agit d'une affectation, la variable affectée est marquée morte sauf si elle figure également à droite du symbole =, et toutes les variables à droite du symbole = sont marquées vivantes.

Question 17.

Recopier et compléter les lignes 0 à 4 du tableau suivant qui indique l'état de chaque variable pour chaque instruction du programme ci-dessus. (Un V indique une variable vivante, un M une variable morte.)

ligne	a	b	c	d
0				
1				
2				
3				
4				
5	V	V	M	M
6	V	V	V	M
7	V	V	V	M
8	V	M	V	V
9	M	M	V	V

ligne	a	b	c	d
0	M	M	M	M
1	M	M	M	V
2	M	V	M	M
3	V	V	M	M
4	V	V	M	V
5	V	V	M	M
6	V	V	V	M
7	V	V	V	M
8	V	M	V	V
9	M	M	V	V

Question 18. Comment interpréter le cas où en ligne 0 du tableau on trouve une variable vivante ? Le programme est-il exécutable ?

Si une variable est vivante en ligne 0, c'est que sa valeur est nécessaire pour un calcul, alors qu'elle n'a pas été initialisée : le programme n'est donc pas exécutable.

C'est par exemple le cas d'un programme qui commencerait par l'instruction **print**(b,c) alors que les deux variables n'ont jamais été affectées.

Question 19.

Pour un programme comportant n instructions et utilisant p variables numérotées de 0 à $p-1$, le tableau qui indique l'état de chaque variable pour chaque instruction peut être représenté par une liste de listes vie telle que pour la ligne i (avec $0 \leqslant i < n$) et la variable v (avec $0 \leqslant v < p$), vie[i][v] est True si la variable est vivante et False si la variable est morte.

Écrire une fonction determineVie(prog,p) qui prend en argument un programme et le nombre p de variables à considérer et qui renvoie le tableau vie correspondant.

```
def determineVie(prog,p):
    n = len(prog)
    vie = [ [False]*p for i in range(n) ]
    for j in range(n):
        i = n - 1 - j # i varie de n-1 a 0
        v,args = prog[i]
        if i < n-1:
            for j in range(p):
              vie[i][j] = vie[i+1][j] # on recopie l'etat courant des variables
        if v != None:
            vie[i][v] = False
        for x in args :
            vie[i][x] = True
    return vie
```

Question 20.

Recopier et compléter la fonction suivante periodesVie(vie,v) qui prend en arguments la table vie obtenue par la fonction determineVie et le numéro d'une variable et qui renvoie la liste des périodes de vie de cette variable. Ainsi, pour l'exemple du programme considéré, et la variable d, la fonction periodesVie renvoie la liste [(7, 9), (3, 4), (0, 1)] (l'ordre n'a pas d'importance).

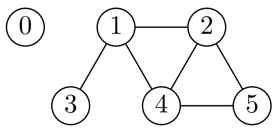
```
def periodesVie(vie,v):
    n = len(vie)
    periodes = []
    i = n-1
    encours = False
    while i>=0:
        if vie[i][v]:
            if not encours:
                ...
                ...
        else:
            if ...:
                ...
                ...
        i -= 1
    return periodes
```

```
def periodesVie(vie,v):
    n = len(vie)
    periodes = []
    i = n-1
    encours = False
    while i>=0:
        if vie[i][v]:
            if not encours:
                encours = True
                fin = i
        else:
            if encours:
                encours = False
                periodes.append((i,fin))
        i -= 1
    return periodes
```

Partie C – graphe de coexistence

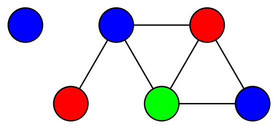
Des techniques analogues à celle présentée dans la partie B permettent de construire un graphe de coexistence des variables occupant des registres. Il s'agit d'un graphe non orienté tel que deux sommets reliés dans ce graphe correspondent à deux variables vivantes au même moment, ce qui oblige à les ranger dans des registres différents.

La figure ci-dessous montre un exemple de graphe de coexistence : les variables numérotées 1, 2, 4 doivent être rangées dans trois registres distincts. Mais les variables numérotées 1 et 5 peuvent être rangées dans le même registre, puisque les sommets correspondants ne sont pas reliés.



Pour déterminer le nombre de registres nécessaire, il suffit de colorier le graphe de sorte que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes, en utilisant le moins de couleurs possible. Ce nombre minimal de couleur est le nombre cherché de registres.

Dans l'exemple du graphe ci-dessus, trois couleurs suffisent.



Question 21.

Le problème général de la détermination du nombre minimal de couleurs nécessaire à la coloration d'un graphe est connu pour être un problème NP-complet. Que signifie l'expression « ce problème est dans la classe NP » ? et que signifie l'adjonction de l'adjectif « complet » ?

Un problème est dans la classe NP s'il est décidé par une machine de Turing non déterministe en temps polynomial. Autrement dit, on peut tester une proposition de solution et dire en temps polynomial si elle est réellement ou non solution. Par exemple, pour la coloration d'un graphe, étant donné un graphe colorié il est facile et rapide de vérifier que deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur.

Un problème de la classe NP est NP-complet si tout problème NP se ramène à celui-ci en temps polynomial. Autrement dit, il n'y a pas de problème plus difficile que lui. Ces réductions d'un problème à un autre sont souvent difficiles à trouver !

Dans la suite, un graphe non orienté possédant n sommets numérotés de 0 à $n-1$ est représenté par une liste G de n listes : G[i] est la liste (éventuellement vide) des sommets reliés au sommet i. Autrement dit, G[i] est la liste des voisins du sommet i.

L'exemple du graphe précédent est représenté par la liste G=[[], [2,3,4], [1,4,5], [1], [1,2,5], [2,4]].

Une coloration du graphe est représentée par une liste donnant le numéro de la couleur de chaque sommet. Dans l'exemple ci-dessus, si bleu est numéro 0, rouge numéro 1 et vert numéro 2, la coloration proposée est représentée par la liste couleur = [0,0,1,1,2,0] .

Question 22.

Écrire une fonction bonnesCouleurs(G,couleur) qui prend en argument un graphe G et une coloration couleur de ses sommets et qui renvoie True si et seulement si la coloration est correcte, c'est-à-dire que deux sommets adjacents n'ont jamais la même couleur.

```python
def bonnesCouleurs(G, couleur):
    n = len(G)
    for i in range(n):
        c = couleur[i]
        for voisin in G[i]:
            if c == couleur[voisin]:
                return False
    return True
```

Question 23.

Il est facile d'écrire un algorithme qui permet de déterminer une coloration correcte d'un graphe, mais sans garantir qu'on utilise le nombre minimal de couleurs.

Par exemple, en partant d'un graphe dont aucun sommet n'est colorié.

1. choisir la première couleur disponible ;
2. tant qu'il existe un sommet non colorié répéter les étapes 3 à 6 ;
3. choisir un sommet s non colorié, et le colorier avec la couleur courante ;
4. répéter l'étape 5 pour tout sommet t non colorié ;
5. si t n'est adjacent à aucun sommet colorié avec la couleur courante, le colorier avec la couleur courante ;
6. choisir une nouvelle couleur ;
7. fin de l'algorithme.

Écrire une fonction coloriage (G) qui prend en argument un graphe et renvoie à l'aide de l'algorithme ci-dessus une coloration possible de ses sommets. On pourra utiliser (sans la recopier) la fonction auxiliaire suivante qui vérifie qu'aucun sommet de la liste voisins n'est de la couleur c.

```python
def coloriable(voisins,couleur,c):
    for v in voisins:
        if couleur[v] == c: return False
    return True
```

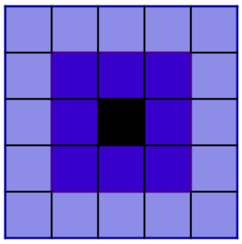
```python
def coloriable(voisins,couleur,c):
    for v in voisins:
        if couleur[v] == c: return False
    return True

def coloriage(G):
    n = len(G)
    couleur = [None] * n
    c = 0           # couleur courante
    incolores = n # nombre de sommets non colories
    while incolores > 0:
        s = 0
        while couleur[s] != None: s += 1
        couleur[s] = c
        incolores -= 1
        t = 0
```

```
        for t in range(n):
            if couleur[t]==None:
                if coloriable(G[t],couleur,c):
                    couleur[t] = c
                    incolores -= 1
        c += 1
    return couleur
```

Thème : suites

L'exercice

Un artisan doit carreler une pièce carrée accueillant en son centre une petite statue dont le socle est carré. Il utilise des carreaux de même dimension que le socle de la statue. Il commence d'abord en entourant celle-ci par une couronne de carreaux et poursuit avec des couronnes de plus en plus grandes comme indiqué sur la figure ci-contre, où le socle de la statue est représenté par le carré noir central.
Il a besoin de 157 couronnes autour du socle de la statue pour paver la salle.



Il dispose en tout de 99 221 carreaux, en a-t-il assez?

Les productions de trois élèves de terminale STMG

Élève 1

Pour passer d'une couronne à une autre, l'artisan doit rajouter 8 carreaux à chaque fois.
On a donc une suite arithmétique de premier terme 8 et de raison 8.
u_{157} *est le nombre de carreaux de la* 157*-ième couronne, on a* $u_{157} = 8 + 8 \times 157 = 1264$.
La salle étant carrée, on enlève les 4 carreaux formant les coins, on a donc en tout 1 260 *carreaux sur les quatre côtés donc 315 carreaux sur un côté. En ajoutant les deux coins, on obtient 317.*
Il faut donc $317^2 = 100\,489$ *carreaux . L'artisan n'a donc pas assez de carreaux.*

Élève 2

u_n *est le nombre de carreaux sur la* n*-ième couronne, on a* $u_1 = 8$. *Pour passer d'une couronne à l'autre, il suffit d'ajouter les quatre coins. On a donc une suite arithmétique de premier terme 8 et de raison 4.*

Le nombre de carreaux nécessaire pour carreler entièrement la salle est égal à

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{157} = 157 \times \frac{8 + 4 \times 156}{2} = 49\,612.$$

L'artisan a donc largement assez de carreaux.

Élève 3

J'ai calculé l'aire totale et j'ai soustrait l'aire du socle; j'obtiens $157^2 - 1$.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les démarches de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez les conseils que vous pourriez leur apporter.

2 – Présenter une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale STMG.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *suites* permettant notamment de développer les compétences « chercher » et « calculer ».

Thème : arithmétique

L'exercice

Soit n un entier naturel.
Démontrer que, dans l'écriture en base dix, les entiers n et n^5 ont le même chiffre des unités.

Les réponses de trois élèves de terminale scientifique spécialité mathématiques

Élève 1

Je regarde tous les cas possibles pour le chiffre des unités, entre 1 et 9.

$$1\times1\times1\times1\times1 = 1, \qquad 2\times2\times2\times2\times2 = 32, \qquad 3\times3\times3\times3\times3 = 243$$

et ainsi de suite. Je calcule les autres avec un tableur, ça marche chaque fois, c'est le même chiffre.

Élève 2

J'ai comparé les restes de n^5 et n dans la division euclidienne par 10 à l'aide d'un programme écrit en langage Python, j'obtiens les mêmes restes. Donc le chiffre des unités de n^5 et n est le même.

```python
from math import*
for n in range(10):
    a=(n**5)%10
    b=n%10
    if a==b:
        print(n)
```

Élève 3

J'ai calculé $n^5 - n$ pour les premières valeurs de n, le dernier chiffre est 0.
Je vais le prouver par récurrence : je suppose que $n^5 - n$ est multiple de 10 et alors je dois montrer que $(n+1)^5 - (n+1)$ est aussi multiple de 10.

$$\begin{aligned}(n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1\\ &= (n^5 - n) + 10(n^3 + n^2) + 5(n^4 + n)\\ &= 5(n^4 + n)\end{aligned}$$

car $n^5 - n$ et $10(n^3 + n^2)$ sont des multiples de 10.
Ensuite, je ne sais pas quoi faire pour $n^4 + n$.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des trois élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique spécialité mathématiques.

3 – Présenter deux exercices sur le thème *arithmétique*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « communiquer ».

Thème : probabilités

L'exercice

On dispose de deux pièces A et B.

La probabilité d'obtenir pile avec la pièce A est égale à $\frac{1}{3}$; avec la pièce B, cette probabilité est $\frac{1}{2}$.

On effectue n lancers de chaque pièce, avec $n \geqslant 4$.

A-t-on plus de chances d'obtenir exactement trois fois pile avec la pièce A ou avec la pièce B ?

Les productions de deux élèves de terminale

Élève 1

En utilisant un tableur et en faisant varier n, j'ai comparé la probabilité d'avoir trois fois pile avec la pièce A et la probabilité d'avoir trois fois pile avec la pièce B.
Je trouve que c'est vrai à partir de 8.

	A	B	C
1	*n*	*pièce A*	*pièce B*
2	*4*	*9,9E-02*	*2,5E-01*
3	*5*	*1,6E-01*	*3,1E-01*
4	*6*	*2,2E-01*	*3,1E-01*
5	*7*	*2,6E-01*	*2,7E-01*
6	*8*	*2,7E-01*	*2,2E-01*
7	*9*	*2,7E-01*	*1,6E-01*

Élève 2

Je nomme p la probabilité d'obtenir pile à chaque lancer.
Par indépendance des lancers successifs, j'obtiens la probabilité d'avoir trois fois pile avec une pièce :

$$p^3(1-p)^{n-3}.$$

Je dois comparer $\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$ *et* $\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ *mais je n'y suis pas arrivé.*

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pourriez leur proposer.

2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale.

3 – Présenter deux exercices sur le thème *probabilités*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « chercher ».

Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

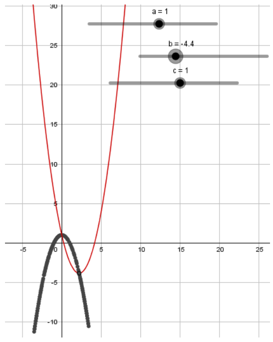
On considère les paraboles d'équation $y = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels, avec a non nul.

1. Quel est le lieu des sommets de ces paraboles lorsque b varie dans $\mathbb{R}$, a et c étant fixés ?
2. On fixe $c = 1$. Tout point du plan est-il le sommet d'une de ces paraboles ?

Les réponses de deux élèves de première S à la question 1

Élève 1

En utilisant un logiciel de géométrie et en activant la trace du sommet, nous pouvons constater qu'il se déplace sur une parabole.



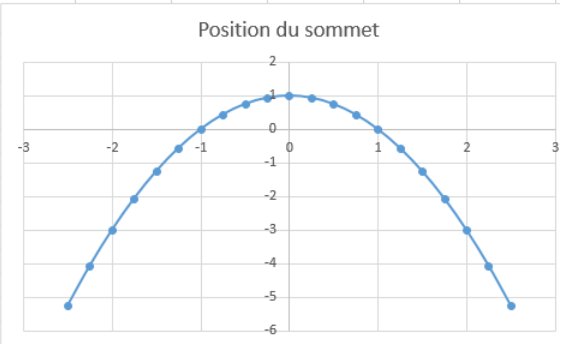
Élève 2

Le sommet S d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{-b}{2a};\dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.

Comme je ne vois pas quel est le lieu des sommets, j'ai utilisé un tableur.

J'ai fixé $a = 1$ et $c = 1$ pour obtenir une représentation graphique de la position du sommet : c'est une parabole d'équation $y = 1 - x^2$.

	A	B	C
1	b	abscisse sommet	ordonnée sommet
2	-5	2,5	-5,25
3	-4,5	2,25	-4,0625
4	-4	2	-3
5	-3,5	1,75	-2,0625
6	-3	1,5	-1,25
7	-2,5	1,25	-0,5625
8	-2	1	0
9	-1,5	0,75	0,4375
10	-1	0,5	0,75
11	-0,5	0,25	0,9375
12	0	0	1
13	0,5	-0,25	0,9375
14	1	-0,5	0,75
15	1,5	-0,75	0,4375
16	2	-1	0



Les questions à traiter devant le jury

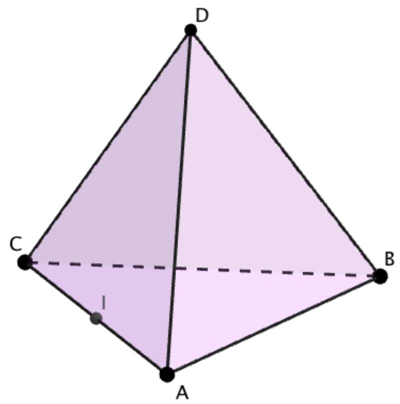
1 – Analyser ces productions d'élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un au moins des exercices devra permettre notamment de développer la compétence « communiquer ».

Thème : géométrie dans l'espace

L'exercice



On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête a.
On note I le milieu du segment $[AC]$.

Donner une valeur approchée à 10^{-2} radian près de l'angle $\widehat{DBI}$.

Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

Je me place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Le point I *a pour coordonnées* $\left(0, \dfrac{1}{2}, 0\right)$ *donc* $\overrightarrow{BI}$ *a pour coordonnées* $\left(-1, \dfrac{1}{2}, 0\right)$ *et* $\overrightarrow{BD}$ *a pour coordonnées* $(-1, 0, 1)$ *donc* $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD} = 1$.

J'en déduis que $\cos\left(\widehat{DBI}\right) = \dfrac{\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}}{BI \times BD} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ *et donc* $\widehat{DBI} = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Je ne comprends pas le problème car ce n'est pas possible.

Élève 2

Je sais que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté c est $c\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le triangle DBI *est rectangle et isocèle en* I *car* $BI = DI = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Par conséquent $\widehat{DBI} = \dfrac{\pi}{4} = 0,79$ *radian.*

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Présenter deux exercices sur le thème *géométrie dans l'espace*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « représenter ».

Thème : modélisation

L'exercice

Le tableau ci-dessous donne la population de la Syldavie, en milliers d'habitants, tous les dix ans depuis 1950.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Population	50 600	52 325	54 115	55 944	57 846	59 784	61 823

On suppose qu'après 2010, le taux d'évolution de cette population sur chaque décennie est égal au taux d'évolution décennal moyen entre 1950 et 2010.

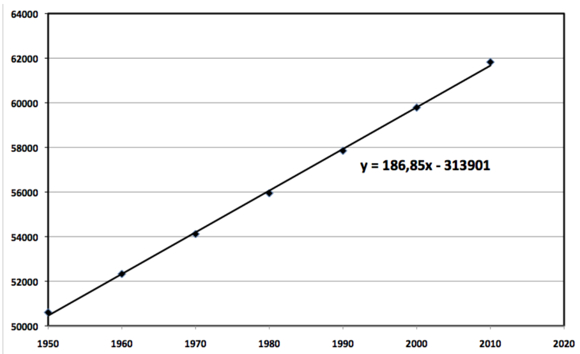
1. Calculer les taux d'évolution sur chaque décennie.
2. Calculer le taux décennal moyen.
3. Estimer la population en 2030 en expliquant la démarche.

Les productions de deux élèves de terminale STMG

Élève 1

question 3 :

Si après 2010, l'évolution est en moyenne comme entre 1950 et 2010, alors je trace la droite de régression du nuage de points avec la méthode des moindres carrés.
J'obtiens la droite : $y = 186,85x - 313\,901$.
En 2030, on remplace donc x par 2030 et on obtient 65 405 *milliers d'habitants.*



Élève 2

question 2 :

Entre 1950 et 2010, le taux d'évolution est : $\dfrac{61\,823 - 50\,600}{50\,600} \approx 0,2217 = 22,17\,\%$.

Donc le taux moyen tous les 10 ans est de $22,17\,\% \div 6 = 3,696\,\%$.

question 3 :

En 2030, la population en Syldavie sera donc égale à $61\,823 \times 1,0369^2 \approx 66\,477$ *milliers d'habitants.*

Les questions à traiter devant le jury

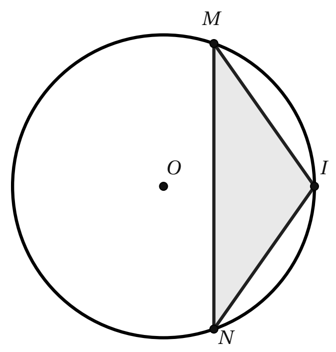
1 – Analyser les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez, en particulier, les aides qui pourraient leur être apportées.

2 – Présenter une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale STMG.

3 – Proposer deux exercices, un au niveau lycée et un au niveau collège, sur le thème *modélisation.* L'un des exercices devra notamment permettre de développer la compétence « chercher ».

Thème : problème avec prise d'initiative

L'exercice



On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 et un point I fixé sur ce cercle. Soit M un point mobile sur ce cercle, on note N son symétrique par rapport à la droite (OI).

Quelle est la nature du triangle MNI lorsque son aire est maximale ?

Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

Quand le point M est en I ou en son symétrique par rapport à O, l'aire du triangle MNI est nulle.
Par conséquent l'aire du triangle est maximale quand le point M est à la verticale de O et le triangle MNI est alors rectangle en I.

Élève 2

Soit $\alpha = \widehat{OIM}$. *Comme le triangle OMI est isocèle en O, on a donc MI* $= 2\cos(\alpha)$.
La droite (OI) coupe [MN] en son milieu H. J'en déduis que MH $= MI \times \sin(\alpha)$ *et HI* $= MI \times \cos(\alpha)$.
Donc l'aire est égale à $f(\alpha) = 4\cos^3(\alpha)\sin(\alpha)$.
J'ai cherché où la dérivée s'annule mais je n'y suis pas arrivé.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Présenter deux exercices sur le thème *problème avec prise d'initiative*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée.

Thème : suites

L'exercice

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n.$$

Étudier le sens de variation de cette suite.

Les productions de trois élèves de terminale scientifique

Élève 1

En calculant les premiers termes, on voit que la suite tend vers $+\infty$ donc elle est croissante.

Élève 2

En supposant que la suite est croissante, on a $u_n \geqslant 3$ puisque $u_0 = 3$.

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n = u_n(u_n - 2).$$

On vérifie que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc elle est bien croissante.

Élève 3

La fonction $f(x) = x^2 - x$ est croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ donc la suite est croissante.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les productions de ces trois élèves en repérant les erreurs et les réussites. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *suites* dont l'un fait appel à un algorithme.

Thème : probabilités

L'exercice

Mathieu et Jeanne ont inventé un jeu avec leur calculatrice. Chaque joueur obtient un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0;1]$ à l'aide de la calculatrice. Si le produit des deux nombres est inférieur ou égal à $0,5$ alors Jeanne gagne, sinon c'est Mathieu qui gagne. Après quelques parties, ils s'aperçoivent que Jeanne gagne très souvent et Mathieu propose alors de remplacer la valeur $0,5$ par un autre nombre pour rendre le jeu plus équitable.
La version initiale du jeu avantage-t-elle Jeanne ? Mathieu peut-il rendre ce jeu équitable ?

Les productions de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

J'ai commencé par réaliser le programme ci-contre pour vérifier que Jeanne gagne très souvent.
J'ai simulé $10\,000$ parties et Jeanne a gagné $8\,450$ fois donc ce jeu avantage effectivement Jeanne.

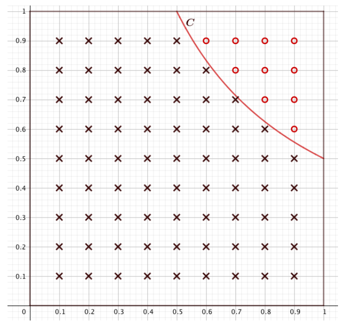
```
from random import*
def jouer():
    x=uniform(0,1)
    y=uniform(0,1)
    if x*y<=0.5:
        return "Jeanne"
    else:
        return "Mathieu"
```

J'ai remplacé la valeur $0,5$ par des valeurs plus petites et à nouveau j'ai simulé $10\,000$ parties.
Avec la valeur $0,19$, le jeu semble plus équitable.

Valeurs k qui remplacent 0,5	*0,3*	*0,2*	*0,15*	*0,17*	*0,18*	*0,19*
Victoires de Jeanne sur 10000 parties	*6603*	*5217*	*4405*	*4730*	*4937*	*5023*

Élève 2

Dans ce jeu, c'est comme si dans mon repère ci-contre, on choisissait un point au hasard dans le carré de côté 1.
Les points marqués d'une croix font gagner Jeanne et les autres font gagner Mathieu.
Mais il y a plein d'autres points et les points qui font gagner Jeanne sont placés sous la courbe C d'équation $y = \dfrac{0,5}{x}$.
L'aire de Jeanne est égale à : $0,5 + 0,5\ln(2) \approx 0,8466$.



Pour rendre ce jeu plus équitable, il faut trouver k pour que l'aire sous la courbe d'équation $y = \dfrac{k}{x}$ *soit égale à 0,5. On a donc l'équation à résoudre :* $\displaystyle\int_0^1 \frac{k}{x}\,\mathrm{d}x = 0,5$.
On obtient $k\ln(1) - k\ln(0) = 0,5$ *mais il y a un problème car* $\ln(0)$ *n'existe pas.*

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les productions de ces deux élèves en mettant en évidence la pertinence de leurs démarches ainsi que leurs erreurs éventuelles. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Présenter une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposer deux exercices, sur le thème *probabilités*, l'un au niveau lycée et l'autre au niveau collège.

Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

Pour tout réel p, on considère la fonction f_p définie sur $]0;+\infty[$ par $f_p(x) = x(p - \ln x)$.

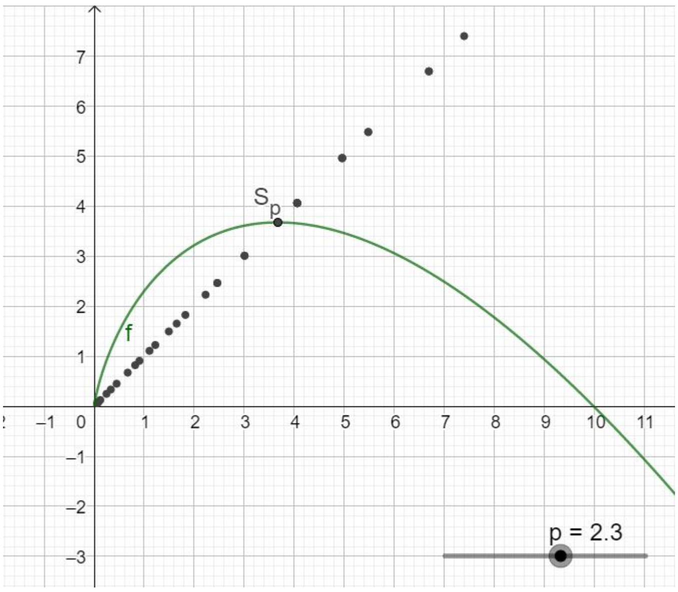
1. Montrer que f_p possède un maximum sur $]0;+\infty[$, atteint en une valeur x_p que l'on précisera.
2. On note S_p le point de la courbe représentative de f_p d'abscisse x_p. L'affirmation suivante est-elle vraie ?

   Affirmation : lorsque p parcourt $\mathbb{R}$, l'ensemble des points S_p est une demi-droite.

Les productions de deux élèves de terminale S à la deuxième question

Élève 1

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, j'ai affiché la trace des sommets des courbes des fonctions f_p :



J'observe que les points S_p sont alignés. L'affirmation est vraie.

Élève 2

À la première question, j'ai trouvé que $x_p = \mathrm{e}^{p-1}$ et donc on trouve la courbe d'une exponentielle. L'affirmation est fausse.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

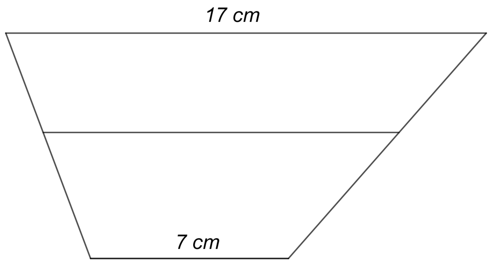
2 – Présenter une correction de la deuxième question de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration*, l'un au niveau collège et l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment développer la compétence « raisonner ».

Thème : géométrie plane

L'exercice

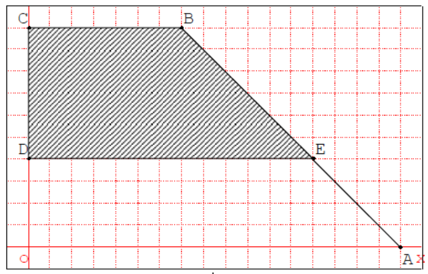
On considère un trapèze, représenté ci-contre : ses bases sont de longueurs 7 cm et 17 cm. On partage ce trapèze en deux trapèzes de même aire en traçant un segment parallèle aux bases. Quelle est la longueur de ce segment ?



Les productions de deux groupes d'élèves de cycle 4

Groupe 1

On a construit une figure dans un quadrillage avec une hauteur du grand trapèze égale à 10 carreaux.
On remarque que le côté oblique partage chaque carreau en 2, c'est facile de compter tous les carreaux.
On a tracé le trait pour obtenir la largeur du milieu : 13.



Groupe 2

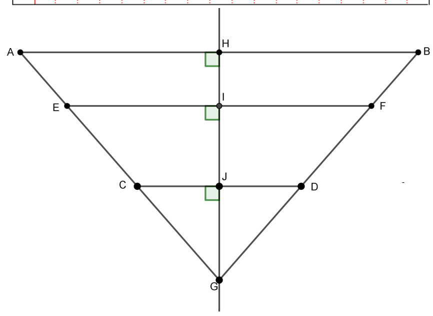
On a reconnu une figure de Thalès.

GAB est un agrandissement de GCD de rapport $\frac{17}{7}$.

GEF est un agrandissement de GCD de rapport $\frac{\ell}{7}$.

On a posé a = aire de GCD.
Comme on a l'égalité des aires des deux trapèzes ABFE et EFDC, on a écrit : $\frac{17}{7}a - \frac{\ell}{7}a = \frac{\ell}{7}a - a$.

On a simplifié et on obtient $\ell = 12$.



Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les réponses de ces deux groupes d'élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez, en particulier, les aides qui pourraient leur être apportées.

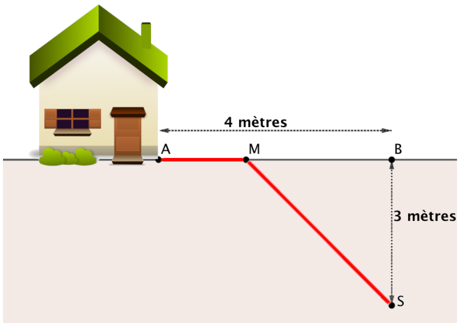
2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe en cycle 4.

3 – Proposer deux exercices, un au niveau du lycée et un au niveau du collège sur le thème *géométrie plane.*

Thème : optimisation

L'exercice

Une maison doit être raccordée, à partir du point A, à un réseau de gaz situé au point S, à 4 mètres de A horizontalement et à 3 mètres verticalement de B, à l'aide d'une conduite comme indiqué sur la figure ci-contre.
La conduite de gaz est schématisée en rouge.



L'installation de la partie de la conduite située à la surface du sol coûte 300 euros par mètre alors que celle enfouie sous le sol coûte 750 euros par mètre.
Où placer le point M sur le segment $[AB]$ pour rendre le coût de raccordement minimal ?

Les productions de trois élèves de terminale scientifique

Élève 1

Si on enterre complètement la conduite, alors elle est représentée par $[AS]$.
Avec le théorème de Pythagore, on a $AS = 5$ *m et le coût vaut donc :* $5 \times 750 = 3\,750$, *donc* $3\,750$ *euros.*
Si on va jusqu'au point B *et que l'on descend verticalement jusqu'à* S, *alors le coût vaut :*
$4 \times 300 + 3 \times 750 = 3\,450$, *soit* $3\,450$ *euros. Plus on ira vers* B, *moins il y aura de partie enterrée, donc le coût minimal est obtenu quand* $M = B$, *soit à 4 mètres de A.*

Élève 2

Avec le tableur, je calcule, pour toutes les valeurs possibles de la distance AM *(entre 0 et 4 mètres tous les centimètres car cela suffit dans la réalité), la distance* MS *avec Pythagore, puis le coût de la partie au sol et le coût de la partie enfouie. Le coût minimal total est 3 262,16 euros quand on commence à creuser à 2,69 mètres du point A.*

	A	B	C	D	E
1	AM	MS	Coût au sol	Coût en terre	Coût total
2	0	5	0	3750,00	3750,00
3	0,01	4,99200361	3	3744,00	3747,00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
270	2,68	3,27756007	804	2458,17	3262,17
271	2,69	3,277354548	807	2455,16	3262,16
272	2,7	3,26955654	810	2452,17	3262,17
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
402	4	3	1200	2250	3450

Élève 3

Je pose $AM = x$ *et j'ai calculé la longueur AM+MS. J'obtiens une fonction* $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 8x + 25}$.
Avec ma calculatrice, je vois que la fonction est strictement croissante de 5 jusqu'à 7.
Donc il faut mettre M en A pour avoir le minimum.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les productions de ces trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *optimisation* permettant notamment de développer la compétence « raisonner ».

Thème : problème avec prise d'initiative

L'exercice

Un homme a gardé toutes les bougies de chacun de ses anniversaires depuis son premier anniversaire. Il lui manque cependant les bougies d'une année où il n'a pas pu le fêter.
Chaque année, il met sur le gâteau autant de bougies que son âge. À ce jour il a conservé en tout 1999 bougies.
À quel âge n'a-t-il pas pu fêter son anniversaire ?

Les productions de deux élèves de première scientifique

Élève 1

J'ai utilisé un tableur avec une colonne « âge », une colonne « somme des bougies » et une colonne « somme − 1999 ». J'obtiens le tableau ci-contre. Donc il n'a pas eu de gâteau à 17 ans ou à 81 ans.

	A	B	C
1	âge	somme	somme − 1999
2	1	1	-1998
⋮			
61	60	1830	-169
62	61	1891	-108
63	62	1953	-46
64	63	2016	17
65	64	2080	81
66	65	2145	146
67	66	2211	212
68	67	2278	279

Élève 2

On résout : $S_n = 1999 + x$ *où* x *est l'anniversaire non fêté et* S_n *le nombre de bougies d'anniversaire depuis l'âge de 1 an.*

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1999 + x \iff n^2 + n - 2(1999 + x) = 0.$$

On obtient alors : $\Delta = 1 + 8(1999 + x) = 15993 + 8x$.

Pour $x = 17$ *on obtient* $\Delta = 16129 = 127^2$.

Donc à 17 ans, il n'a pas eu d'anniversaire.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser les démarches de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs, ainsi que l'accompagnement que vous pourriez leur apporter.

2 – Présenter la correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *problème avec prise d'initiative* permettant notamment de développer la compétence « communiquer ».

Thème : problème avec prise d'initiative

L'exercice

Au début du 19e siècle, un marchand veut remonter de Sète jusqu'à Toulouse pour vendre sa farine. Pour cela, il emprunte le canal du Midi qui relie la mer Méditerranée à la Garonne. Ce canal comporte 63 écluses. À chacune d'elles, le marchand doit laisser 1% de son chargement en péage et échanger 5 kg de farine contre de la nourriture.

1 – Si le marchand part de Sète avec 10 tonnes de farine, combien lui en restera-t-il à Toulouse ?

2 – Pour rentabiliser son voyage, le marchand doit arriver à Toulouse avec au moins la moitié de son chargement de départ. Quelle quantité minimale de farine doit-il embarquer à Sète pour que son voyage soit rentable à l'arrivée à Toulouse ?

Les réponses de trois élèves de terminale scientifique à la question 2

Élève 1

J'ai rédigé un programme en langage Python.
Pour trouver la quantité minimale de farine, j'ai programmé une fonction qui calcule le chargement restant lors de l'arrivée à Toulouse. Puis je suis parti de 10 000 et j'ai cherché le nombre minimum de kg de farine pour rentabiliser le voyage.
Le programme affiche 7 589.

```python
from math import *
def toulouse(a) :
    for i in range(63):
        a = a - 0.01*a - 5
    return(a)

a = 10000
while toulouse(a) >= a/2:
    a = a - 1
print(a)
```

Élève 2

N est le nombre de kg à l'arrivée, il faut l'augmenter de 1% à chaque écluse.
j'obtiens $N \times (1,01)^{63}$ *kg puis il faut ajouter* 63×5 *kg pour la nourriture.*
On veut que : $N \times (1,01)^{63} + 315 = 2N$*, je trouve* $N \approx 2456$ *donc il doit partir de Sète avec le double soit 4 912 kg de farine.*

Élève 3

J'appelle u_n *le nombre de kg à la* n^{e} *écluse. On a donc* $u_{n+1} = 0,99u_n - 5$ *et je dois résoudre* $u_{63} \geq \dfrac{u_0}{2}$.
Ensuite je ne sais pas comment faire.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des trois élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

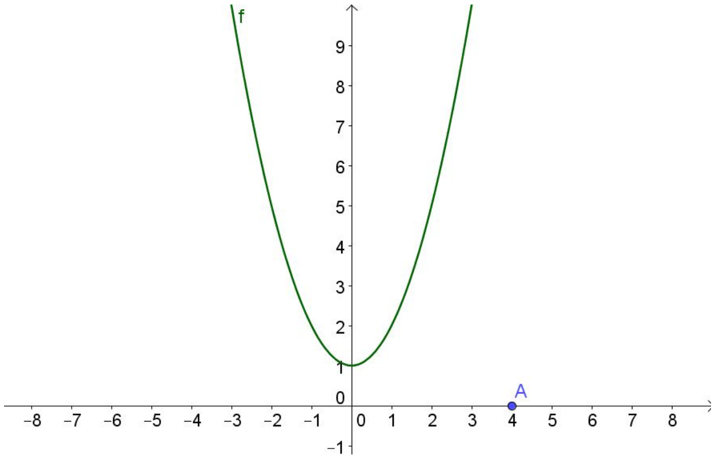
2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale.

3 – Présenter deux exercices sur le thème *problème avec prise d'initiative*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « raisonner ».

Thème : dérivation

L'exercice

Dans un repère, on a représenté graphiquement la fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$ et le point $A(4;0)$.



Existe-il des tangentes à la courbe passant par le point A ?

Les productions de deux élèves de première S

Élève 1

Avec un logiciel, je construis la parabole et une droite variable passant par A. Je constate qu'il existe une seule tangente, en $x = -0,1$.
Je cherche alors l'équation de cette tangente sous la forme $y = m(x-4)$. *L'équation du second degré* $x^2 + 1 = m(x-4)$ *doit avoir une seule solution, car il n'y a qu'un seul point d'intersection entre une courbe et sa tangente. Donc son discriminant doit être nul et j'en déduis la valeur de m.*

Élève 2

Je sais que l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est $y - (a^2+1) = 2a(x-a)$. *Elle doit passer par A et donc l'équation devient* $-a^2 - 1 = 2a(4-a)$. *Cette identité remarquable est fausse, je ne sais pas continuer.*

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

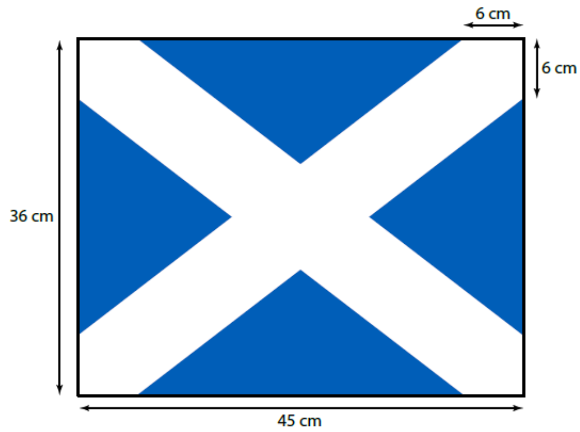
2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.

3 – Présenter deux exercices sur le thème *dérivation*, dont l'un au moins illustre une application à une autre discipline scientifique.

Thème : géométrie plane

L'exercice

Le drapeau écossais est constitué d'une croix de Saint-André blanche sur fond bleu. La figure ci-contre est un schéma du drapeau avec les cotes utiles à son dessin.
Quelle est l'aire de la partie blanche du drapeau ?



Les productions de trois élèves de troisième

Élève 1

À l'aide d'un logiciel de géométrie, j'ai reproduit la figure. Je trouve que la croix blanche a une aire de $834{,}6\,\text{cm}^2$.

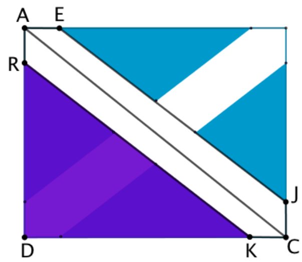
Élève 2

Je commence par calculer l'aire d'une demi-bande blanche diagonale, en traçant la diagonale du grand rectangle.

L'aire du demi-rectangle est $\dfrac{36\times 45}{2} = 810\,\text{cm}^2$.

L'aire du triangle RDK est $\dfrac{(36-6)\times(45-6)}{2} = 585\,\text{cm}^2$.

L'aire de la bande RAEJCKR est $2\times(810-585) = 450\,\text{cm}^2$.
L'aire de la croix blanche vaut donc le double, soit $900\,\text{cm}^2$.



Élève 3

Les bords de la croix sont parallèles aux diagonales du drapeau, l'angle θ *qu'elles forment avec le côté gauche vérifie donc* $\tan\theta = \dfrac{45}{36}$ *et je trouve* $\theta \approx 51{,}34°$.

L'aire du triangle bleu de gauche vaut alors $(36-6-6)\times\dfrac{36-6-6}{2}\times\cos\theta \approx 180\text{cm}^2$ *alors que l'aire du triangle du bas vaut* $(45-6-6)\times\dfrac{45-6-6}{2}\times\cos\theta \approx 340\text{cm}^2$.

Au total, l'aire de la croix blanche vaut $36\times 45 - 2\times 180 - 2\times 340 \approx 580\,\text{cm}^2$.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des trois élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez les aides que vous pourriez leur apporter.

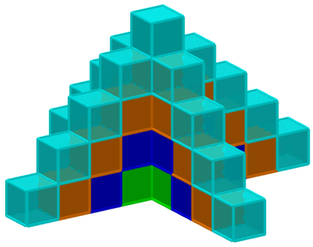
2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de troisième.

3 – Présenter deux exercices sur le thème *Géométrie plane*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « raisonner ».

Thème : suites

L'exercice

On empile des cubes selon le modèle ci-contre :



1 – Combien de cubes sont utilisés si on construit ainsi dix étages ?

2 – Combien d'étages peut-on construire au maximum avec 2 019 cubes, et combien restera-t-il de cubes ?

Les réponses de deux élèves à la première question

Élève 1 (au cycle 4)

1. À chaque étage de cubes, il y a quatre cubes de plus qu'à l'étage précédent. J'ai utilisé ce programme de Scratch :

J'ai trouvé qu'il y avait 190 cubes pour dix étages.

Élève 2 (en première scientifique)

1. Soit u_n le nombre de cubes utilisés pour construire le n^{e} étage.
Comme pour chaque nouvel étage, il faut ajouter 4 cubes par rapport à l'étage précédent, la suite u_n est arithmétique de raison 4 avec $u_0 = 1$.

Or $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = \dfrac{(1+1+4\times 10)}{2} \times 11 = 231$, *il faut donc 231 cubes pour faire dix étages.*

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

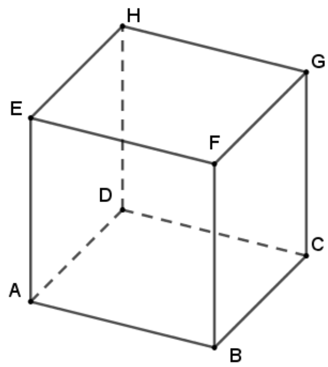
3 – Présenter deux exercices sur le thème *suites*. L'un des exercices devra notamment permettre de travailler la compétence « chercher ».

Thème : géométrie dans l'espace

L'exercice

On coupe un cube $ABCDEFGH$ de côté 6 cm selon le plan (BEG).
On obtient le tétraèdre $BEFG$.

Combien mesure la hauteur du tétraèdre $BEFG$ relative à la base BEG?



Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

Je me place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

$\overrightarrow{DF}$ $(1,-1,1)$ *est un vecteur normal au plan* (BEG) *donc* (BEG) *a pour équation* $x-y+z=0$ *et la hauteur passant par F dans le tétraèdre BEFG a pour équation paramétrique :*

$$\begin{cases} x = t+1, \\ y = -t, \\ z = t+1. \end{cases}$$

D'où $t+1+t+t+1=0$ *donc* $t=-\dfrac{2}{3}$ *et l'intersection est* $I\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.
La hauteur mesure donc $\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$.

Élève 2

Je calcule le volume du tétraèdre : $V = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{6^2}{2}\times 6\right) = 36\,\text{cm}^3$.

J'ai essayé de calculer le volume d'une autre façon mais je n'ai pas réussi à calculer l'aire de BEG.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Proposer une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

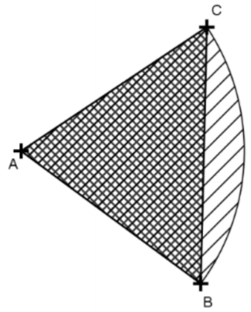
3 – Présenter deux exercices sur le thème *géométrie dans l'espace*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée.

Thème : problème conduisant à l'étude de fonctions

L'exercice

La figure ci-contre représente une portion d'un disque de centre A et de rayon 1. On fait varier la mesure en radian de l'angle $\widehat{BAC}$ dans l'intervalle $]0;\pi]$.

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} d'une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ pour laquelle il y a égalité des aires de la surface hachurée et de la surface quadrillée.



Adapté du manuel Maths'x terminale S spécifique programme 2012

Les productions de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

J'ai posé $\widehat{BAC} = \alpha$ *donc l'aire de ABC* $= \dfrac{B \times h}{2} = \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

L'aire du secteur hachuré est égale à l'aire de la portion de disque privé de l'aire du triangle ABC.

Je résous l'équation
$\dfrac{\alpha}{2} - \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Je pose $f(\alpha) = 2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) - \dfrac{\alpha}{2}$.

Avec ma calculatrice graphique,
je trouve une solution entre $\dfrac{\pi}{2}$ *et* π.
J'ai écrit un programme en langage python.
Il retourne $a = 3,14082566319585$
et $b = 3,141592653589793$.

```
from math import sin, cos, pi
def f(x):
    return 2*sin(x/2)*cos(x/2)-x/2
def dicho():
    a = pi/2
    b = pi
    while b-a>=0.001:
        m = (a+b)/2
        if f(m)<0:
            a = m
        else
            b = m
    return a,b
```

Élève 2

J'ai posé $x = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ *donc l'aire de ABC est* $\sin(x)\cos(x)$ *et l'aire du secteur hachuré* $x - \sin(x)\cos(x)$.
Je résous l'équation $x - 2\sin(x)\cos(x) = 0$.
J'étudie la fonction f *définie par* $f(x) = x - 2\sin(x)\cos(x) = x - \sin(2x)$ *donc* $f'(x) = 1 - \cos(2x)$.
Comme la dérivée est positive, f *est strictement croissante.*
D'après le théorème de bijection il y a une unique solution.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3 – Proposer deux exercices sur le thème *problème conduisant à l'étude de fonctions* l'un au moins permettant de développer la compétence « modéliser ».

Thème : raisonnement

L'exercice

À tout réel m, on associe la droite $\mathscr{D}_m$ d'équation :

$$(2m-1)x+(5-m)y-4m-7=0.$$

1 – Montrer qu'il existe un point K appartenant à toutes les droites $\mathscr{D}_m$.

2 – (a) Déterminer m pour que $\mathscr{D}_m$ passe par le point $A(1;1)$.

(b) Si l'on se donne un point P du plan, existe-t-il toujours un nombre réel m tel que $\mathscr{D}_m$ passe par le point P ?

Les productions de deux élèves de première S

Élève 1

Avec un logiciel de géométrie, j'ai construit la figure avec un curseur pour le paramètre m. En faisant varier m, je vois que :

1. *Toutes les droites $\mathscr{D}_m$ passent par le point $K(3;2)$.*
2. *(a) Avec $m=-1$, $\mathscr{D}_m$ passe par le point A.*

   (b) Quand m varie, la droite $\mathscr{D}_m$ balaie tout le plan donc on peut atteindre tous les points du plan.

Élève 2

1. *Si $m=0$, la droite $\mathscr{D}_0$ a pour équation $-x+5y-7=0$.*
   Si $m=5$, la droite $\mathscr{D}_5$ a pour équation $9x-27=0$.
   Les coordonnées du point d'intersection des deux droites vérifient le système

$$\begin{cases} -x+5y-7=0 \\ 9x-27=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

   Donc toutes les droites $\mathscr{D}_m$ passent par le point $K(3;2)$.
2. *(a) On remplace les coordonnées de A dans l'équation $\mathscr{D}_m$ et on obtient $m=-1$.*

   (b) Si on fait comme dans la question précédente, on obtient une valeur de m donc il existe toujours un nombre m tel que $\mathscr{D}_m$ passe par le point P.

Les questions à traiter devant le jury

1 – Analyser la réponse des deux élèves en mettant en évidence leurs réussites ainsi que leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'accompagnement que vous pouvez leur proposer.

2 – Présenter une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.

3 – Proposer deux exercices, un au niveau lycée et un au niveau collège, qui illustrent différents types de raisonnements utilisés en mathématiques.